Akad. Rätin Dr. Cynthia Hog-Angeloni
Dr. Anton Malevich

Aufgabe 11.1 Entscheiden Sie, ob die folgende Menge U ein Unterraum von V ist. Falls ja, geben Sie eine Basis von U an und bestimmen Sie $\dim U$.

a) $V = \mathbb{R}^2$, $U = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0 \}$.

b) $V = \mathbb{R}^4$, $U = \{ (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4 \mid a_1 - 2a_2 + 3a_3 - 4a_4 = 0 \}$.

c) $V = \mathbb{R}^4$, $U = \left\{ \left(a, \frac{a}{3} + b, b - \frac{c}{2}, a + \frac{b}{2} + \frac{c}{4} \right) \,\middle|\, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$.

d) $V = \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Folgen $(x_1, x_2, \dots)$ mit $x_i \in \mathbb{R}$, U ist die Menge aller Folgen $(x_1, x_2, \dots)$, für die $x_{n+1} = x_n$ für alle $n \geq 3$ gilt.

e) $V = \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, U ist die Menge aller Folgen $(x_1, x_2, \dots)$, für die $x_n = 1$ für alle $n \geq 3$ gilt.

Aufgabe 11.2 Es seien im $\mathbb{R}^4$ die folgenden Vektoren gegeben:

$$v_1 = (1,1,1,1),\ v_2 = (4,4,0,0),\ v_3 = (3,4,2,1),\ v_4 = (2,3,1,0),\ v_5 = (1,0,0,0).$$

a) Zeigen Sie: $M = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ ist linear abhängig.
Ist M ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^4$? (Mit Begründung!)

b) Zeigen Sie, dass $\langle v_1 \rangle \cup \langle v_2 \rangle$ kein Unterraum von V ist,
aber $\langle v_1, v_4, v_5 \rangle \cup \langle v_3 \rangle$ ein Unterraum von V ist.

Aufgabe 11.3 Polardarstellung

a) Schreiben Sie die folgende komplexe Zahlen in Polardarstellung:

$$1 + \mathrm{i}\sqrt{3}, \quad \frac{2 - \mathrm{i}}{3 - \mathrm{i}} - \frac{1 + 8\mathrm{i}}{5(1 + 3\mathrm{i})}.$$

b) Schreiben Sie $1 + \mathrm{i}$ und $1 - \mathrm{i}$ in Polardarstellung.
Zeigen Sie, dass $(1 + \mathrm{i})^n + (1 - \mathrm{i})^n \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist.

c#) Es seien $z = |z| (\cos\varphi + \mathrm{i} \sin\varphi)$, $w = |w| (\cos\psi + \mathrm{i} \sin\psi)$, $w \neq 0$, zwei komplexe Zahlen. Zeigen Sie, dass

$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|} \big(\cos(\varphi - \psi) + \mathrm{i} \sin(\varphi - \psi) \big).$$

Was bedeutet dies geometrisch für $z = 1$?

d) Schreiben Sie die Zahl $z = \frac{(-2+2\mathrm{i})^7}{(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^5}$ in Polardarstellung. (Sie dürfen Teil c) benutzen.)

Aufgabe 11.4 Geometrie

a) Skizzieren Sie die Mengen $A \cap B$ und $A \cup B$, wobei
$A = \{ z \in \mathbb{C} : 2 \leq |z - 1| \leq 4 \}$ und $B = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| \frac{3 - 4\mathrm{i}}{z - 1 + 2\mathrm{i}} \right| < 5 \right\}$.

b) Bestimmen Sie die Polardarstellung von $w = \dfrac{\mathrm{i}}{-3 + 3\mathrm{i}}$.
Bestimmen und skizzieren Sie die Menge $\{ z \in \mathbb{C} : z^4 = w \}$.

Aufgabe$^{\#}$ 11.5 Es sei V ein K-Vektorraum, $v, w, x \in V$, $\lambda \in K$. Ferner bezeichnen wir mit $\mathbf{0}$ den Nullvektor ($\mathbf{0} \in V$) und mit 0 die Zahl Null ($0 \in K$).
Leiten Sie die foglenden Aussagen aus den Vektorraumaxiomen her.

a) Aus $v + x = v$ folgt stets $x = \mathbf{0}$.

b) Ist $x + v = x + w$, so folgt $v = w$.

c) $0 \cdot v = \mathbf{0}$ und $\lambda \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

d) Aus $\lambda \cdot x = \mathbf{0}$ folgt entweder $\lambda = 0$ oder $x = \mathbf{0}$.

e) $(-1) \cdot v = -v$.

Aufgabe$^{\#}$ 11.6 Es bezeichne $\mathrm{Abb}(A, \mathbb{R})$ die Menge aller Abbildungen $f : A \to \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Abb}(A, \mathbb{R})$ mit Addition $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$ und Skalarmultiplikation $(\lambda \cdot f)(x) := \lambda \cdot f(x)$ für $f, g \in \mathrm{Abb}(A, \mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in A$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist.

b) Es sei $V = \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass die folgenden Mengen Unterräume von V sind:
$$U = \{ f \in V \mid f(x) = f(-x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\} \text{ und}$$
$$W = \{ g \in V \mid g(x) = -g(-x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\} .$$
Zeigen Sie ferner: $U \cap W = \{0\}$.

c) Zeigen Sie, dass die folgenden Mengen U Unterräume von $V = \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ sind.

(i) $U = \left\{ a \in V \mid \lim\limits_{n\to\infty} a = 0 \right\}$.

(ii) $U = \{ a \in V \mid \text{es gibt ein } N \in \mathbb{N} \text{ mit } a(n) = 0 \text{ für alle } n \geq N\}$.

Aufgabe$^{\#}$ 11.7 Es sei $M = (v_1, v_2, v_3, v_4)$, wobei
$$v_1 = \big(1, 2, 0\big)\,, \quad v_2 = \big(0, 1, 3\big)\,, \quad v_3 = \big(1, 0, 0\big)\,, \quad v_4 = \big(1, 1, 1\big) \ \in \mathbb{R}^3\,.$$

a) Zeigen Sie: M ist linear abhängig.

b) Beweisen Sie, dass M ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$ ist. Wählen Sie dazu drei Vektoren von M aus, die eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden.

Aufgabe$^{\#}$ 11.8 Es seien $z_1 = -\dfrac{8}{1+\mathrm{i}} - \dfrac{6-2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$, $z_2 = \dfrac{4\mathrm{i}+2}{3\mathrm{i}} - \dfrac{1}{\mathrm{i}}$.
Berechnen Sie $\mathrm{Re}(z_1)$, $\mathrm{Im}(z_1)$, $|z_1|$, $\mathrm{Re}(z_2)$, $\mathrm{Im}(z_2)$, $|z_2|$, $\mathrm{Re}(z_1 + z_2)$, $\mathrm{Im}(z_1 + z_2)$, $|z_1 + z_2|$, $\mathrm{Re}(z_1 \cdot z_2)$, $\mathrm{Im}(z_1 \cdot z_2)$, $|z_1 \cdot z_2|$ $\mathrm{Re}(\frac{z_1}{z_2})$, $\mathrm{Im}(\frac{z_1}{z_2})$, $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$.

Aufgabe$^{\#}$ 11.9 Skizzieren Sie die Mengen $A \cap B$ und $A \cup B$, wobei

a) $A = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| \leq 1\}$ und $B = \{ z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)| \leq 1\}$,

b) $A = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z + \mathrm{i}| \leq 2\}$ und $B = \{ z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) + |\mathrm{Im}(z)| \leq 1\}$,

c) $A = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - \mathrm{i}| \leq 1\}$ und $B = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) + |\mathrm{Im}(z)|^2 \leq 1 \right\}$.

Aufgabe$^{\#}$ 11.10 Es seien $w_1 = \dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$, $w_2 = \dfrac{1}{1-\mathrm{i}}$

a) Bestimmen Sie die Polardarstellung von w_1 bzw. w_2.

b) Lösen Sie die beiden Gleichungen $z^5 = w_1$ bzw. $z^5 = w_2$ nach z.

Aufgaben und Aufgabenteile mit # werden **nicht** korrigiert und müssen **nicht** abgegeben werden.