Lineare Algebra und Geometrie I – SS 2019 **Blatt 12**

Akad. Rätin Dr. Cynthia Hog-Angeloni
Dr. Anton Malevich

Aufgabe 12.1 Schnitt und Summe der Unterräume.

a) Zeigen Sie, dass

$$U = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \,\middle|\, (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_5, x_4, x_3, x_2, x_1) \right\}$$

ein Unterraum von $\mathbb{R}^5$ ist.

b) Berechnen Sie den Durchschnitt $U \cap V$ von U und dem Erzeugnis

$$V = \big\langle (1, 1, 1, 0, 0), (2, 2, 1, 0, 0) \big\rangle$$

und geben Sie eine Basis $\mathcal{B}$ von $U \cap V$ an.

c) Bestimmen Sie Basen $\mathcal{C}$ von U und $\mathcal{D}$ von V, die $\mathcal{B}$ enthalten.

d) Wenn Sie die im Teil c) konstruierten Basen zusammenstellen, erhalten Sie eine Basis $\mathcal{C} \cup \mathcal{D}$ von $U + V$. Zeigen Sie dies.

Aufgabe 12.2 Lineare Gleichungssysteme

a) Entscheiden Sie, ob das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ über $\mathbb{R}$ lösbar ist, indem Sie die Matrix $(A|b)$ in Zeilenstufenform bringen. Geben Sie die Lösungsmenge an.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 6 & 5 & -4 & 3 \\ 1 & 2 & 7 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

b) Geben Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ über $\mathbb{R}$ in Abhängigkeit von $\lambda \in \mathbb{R}$ an.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 6 \\ 6 & -3 & 7 & 8 \\ \lambda & -4 & 9 & 10 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 12.3 Kern und Bild

a) Es seien $V = \mathbb{R}^3$ und $f : V \to V$ eine Abbildung mit

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ z - x - y \\ z - x \end{pmatrix}.$$

Beweisen Sie, dass f eine lineare Abbildung ist.

Bestimmen Sie Kern und Bild von f, $f^2 = f \circ f$ und $f^3 = f \circ f \circ f$.

b) Es seien $E = (e_1, e_2, e_3)$ die Standardbasis von $\mathbb{C}^3$ und $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$ eine lineare Abbildung mit

$$f(e_1) = (1, 3),$$
$$f(e_2) = (2, 0),$$
$$f(e_3) = (2, 1).$$

Bestimmen Sie $\operatorname{Ker} f$ und $\operatorname{Bild} f$.

Aufgabe 12.4 Es seien $\mathcal{E}$ die Standardbasis von $V = \mathbb{R}^3$ und $P : V \to V$, $D : V \to V$ lineare Abbildung mit Matrizen

$$P = {}_{\mathcal{E}}P_{\mathcal{E}} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \text{ bzw. } D = {}_{\mathcal{E}}D_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie Kern, Bild und Rang von P. Geben Sie je eine Basis von $\operatorname{Ker} P$ und $\operatorname{Bild} P$ an.

b) Bestimmen Sie Kern, Bild und Rang von $B_1 = PD$ und $B_2 = DP$ Geben Sie je eine Basis von $\operatorname{Ker} B_i$ und $\operatorname{Bild} B_i$ für $i = 1, 2$ an.

Aufgabe# 12.5 a) Entscheiden Sie, ob das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ über $\mathbb{R}$ lösbar ist, indem Sie die Matrix $(A|b)$ in Zeilenstufenform bringen. Geben Sie die Lösungsmenge an.

$$\text{(i)}\ A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 1 \\ 5 & 11 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & -7 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

$$\text{(ii)}\ A = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 \\ 7 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 21 \\ 10 \\ 8 \\ 15 \\ 18 \end{pmatrix}.$$

b) Geben Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ über $\mathbb{R}$ in Abhängigkeit von $\lambda \in \mathbb{R}$ an.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe# 12.6 Bestimmen Sie je eine Basis von $\operatorname{Ker} A$ und $\operatorname{Bild} A$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}.$$

Aufgabe# 12.7
Es seien $A, B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineare Abbildungen. Beweisen Sie: $\operatorname{Bild}(B \circ A) \leq \operatorname{Bild} B$, $\operatorname{Ker} B \leq \operatorname{Ker}(A \circ B)$ mit Gleichheiten für beliebige B genau dann, wenn A ein Isomorphismus ist. (Vgl. Aufgabe 12.4.)

Aufgabe# 12.8 Es seien K ein Körper, V, W zwei K-Vektorräume und $A : V \to W$ eine lineare Abblidung.

a) Beweisen Sie: A ist genau dann injektiv, wenn $\operatorname{Ker} A = \{0\}$ ist, und genau dann surjektiv, wenn $\operatorname{Bild} A = W$ ist.

b) Zeigen Sie: $\dim \operatorname{Ker} A + \dim \operatorname{Bild} A = \dim V$.
(*Hinweis:* Ergänzen Sie eine Basis von $\operatorname{Ker} A$ zu einer Basis von V.)

Aufgaben und Aufgabenteile mit # werden **nicht** korrigiert und müssen **nicht** abgegeben werden.