Lineare Algebra und Geometrie I – SS 2019 **Blatt 13**
AKAD. RÄTIN DR. CYNTHIA HOG-ANGELONI
DR. ANTON MALEVICH
Zusatzblatt

Aufgabe 13.1 Es seien A, B, C Mengen. Beweisen oder widerlegen Sie:

$$A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C.$$

Aufgabe 13.2 Es sei die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $f(x, y) = (x-2y+1, x^2)$. Ist f injektiv, surjektiv, bijektiv? Bestimmen Sie $f^{-1}\big(\{(0, 1)\}\big)$.

Aufgabe 13.3 Derehungen und Spiegelungen in $\mathbb{R}^2$.

a) Geben Sie die Matrix der Spiegelung des $\mathbb{R}^2$ an der Geraden $y = 2x$.

b) Entscheiden Sie, ob die Matrix $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ eine Drehung oder eine Spiegelung des $\mathbb{R}^2$ beschreibt. Bestimmen Sie den Drehwinkel bzw. die Spiegelungsgerade.

Aufgabe 13.4 Bestimmen Sie die Schnittmenge der Geraden $G = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit der Ebene $E = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 13.5 Es sei $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine Drehung um die y-Achse $\mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ um π. Bestimmen Sie die Matrix von A (bzgl. der Standardbasis).

Aufgabe 13.6 Es sei $U = \{\, a+b+c, a+c, a+b, b+c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^4$. Ist U ein Unterraum von $\mathbb{R}^4$? Falls ja, geben Sie eine Basis von U an.

Aufgabe 13.7 Finden Sie alle Lösungen der Gleichung $z^3 = \mathrm{i} - \sqrt{3}$.

Aufgabe 13.8 Bestimmen Sie je eine Basis von $\operatorname{Ker} A$ und $\operatorname{Bild} A$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}.$$

Aufgabe 13.9 Es sei die lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch $(x, y, z) \mapsto (3x + 2y, 2y + 4z, x + 7z)$.

a) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix ${}_{\mathcal{B}}A_{\mathcal{B}}$ bezüglich der Basis

$$\mathcal{B} = \big((1, 1, 4), (0, 1, 2), (0, 0, 3)\big).$$

b) Liegt der Vektor $(2, 12, 5)$ im Bild von A? Bestimmen Sie gegebenenfalls den Urbild.

Aufgabe 13.10 Berechnen Sie die folgenden Abstände:

a) vom Punkt $(2, -1, 4)$ zur Geraden $\mathbb{R} \cdot (1, 1, 1)$;

b) vom Punkt $(1, 1, 1)$ zur Ebene $x + 2y - 2z = 4$;

c) zwischen den Geraden $(1, 0, 1) + \mathbb{R} \cdot (-1, 2, 0)$ und $(0, 1, 4) + \mathbb{R} \cdot (3, -2, 2)$.

Aufgabe 13.11 Es seien $a, b \in \mathbb{R}^3$, beide ungleich 0. Beweisen Sie, dass $p = \frac{\langle a,b\rangle}{\|a\|^2} \cdot a$ der Lotfußpunkt von b auf a ist, d.h. der Punkt auf $\mathbb{R} \cdot a$ mit minimalem Abstand zu b. (*Hinweis:* Es wird ein $t \in \mathbb{R}$ gesucht, sodass $\|ta - b\|^2$ am kleinsten wird.)