Lineare Algebra und Geometrie I – SS 2019 **Blatt 3**

AKAD. RÄTIN DR. CYNTHIA HOG-ANGELONI
DR. ANTON MALEVICH

Aufgabe 3.1

a) Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen, ob sie injektiv, surjektiv oder bijektiv sind. (Begründen Sie Ihre Antwort!)

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \qquad h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$f(x) = 2x - 3 \qquad g(x) = (1, 2x - 3) \qquad h(x_1, x_2) = (x_2^2, x_1^2).$$

b) Bestimmen Sie, welche der folgenden Kompositionen von Funktionen existieren, und geben Sie für diese Kompositionen die Vorschrift für F_j explizit an:

$$F_1 := f \circ g, \quad F_2 := g \circ f, \quad F_3 := h \circ f, \quad F_4 := g \circ h, \quad F_5 := h \circ g, \quad F_6 := h \circ h.$$

c) Falls F_j existiert, beschreiben Sie die Bildmenge von F_j.

Aufgabe 3.2 Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$.

a) Begründen Sie, warum f eine Funktion ist.

b) Berechnen Sie $f(\mathbb{R})$ und $f(A)$, wobei $A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, -1 \leq x \leq 1\}$ ist.

c) Berechnen Sie $f^{-1}(\{1\})$ und $f^{-1}(B)$, wobei $B = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 \leq x \leq 1\}$ ist.

d) Ist f injektiv, surjektiv, bijektiv? (Mit Begründung!)

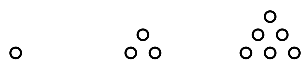
Aufgabe 3.3 Beweisen Sie die folgenden Aussagen mit vollständiger Induktion.

a) $n^2 - 1$ ist für alle ungerade $3 \leq n \in \mathbb{N}$ durch 8 teilbar.

b) $\displaystyle\sum_{m=2}^{n} \frac{1}{(m-1)m} = 1 - \frac{1}{n}$ für alle $n \geq 2$.

c) $\sqrt{n} < 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 3.4 Dreieckszahlen



(i) Betrachten Sie die sogenannten Dreieckszahlen D_n: $D_1 = 1$, $D_2 = 3$, $D_3 = 6$, ... Zeigen Sie, dass $D_n = \frac{1}{2}n(n+1)$ ist.

(ii) Berechnen Sie 1^3, $1^3 + 2^3$, $1^3 + 2^3 + 3^3$, etc. Stellen Sie eine Vermutung über das Verhältnis der Summen $1^3 + \cdots + n^3$ zu den Zahlen D_n auf.

(iii) Beweisen Sie Ihre Vermutung mit vollständiger Induktion.

Aufgabe# 3.5 Welche der folgenden Relationen sind Funktionen von A nach B?

(i) $A = B = \{2, 4, 6\}$, $\mathcal{R} = \{(2,2), (4,4), (2,6)\}$.

(ii) $A = B = \mathbb{R}$, $\mathcal{R} = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, x = y^2\big\}$.

(iii) $A = B = \mathbb{R}$, $\mathcal{R} = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, y = x^2\big\}$.

Bestimmen Sie Definitionsmenge und Wertemenge der Funktionen.

Abgabe: **3.5. bis 12:00 Uhr** im Übungskasten neben der Fachschaft

Aufgabe$^{\#}$ 3.6 Gegeben sei die Abbildung

$$f : \{-2, 0, 1, 2, 3\} \to \{-16, -1, 0, 1, 4, 16, 81, 256\} \text{ durch } x \mapsto x^4.$$

Bestimmen Sie die folgenden Mengen:
$f(\{0, 3\})$, $f(\{-2, 2\})$, $f^{-1}(\{-16, 0, 16\})$, $f^{-1}(\{-1, 4, 256\})$, $f^{-1}(\{-1, 1, 81\})$.

Aufgabe$^{\#}$ 3.7 Es sei $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \le x \le 2\}$ und sei die Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \frac{3}{5+x^2}$.

(i) Bestimmen Sie $f^{-1}\left(\left\{\frac{3}{5}\right\}\right)$ und $f^{-1}(B)$, wobei $B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \ge \frac{1}{2}\right\}$.

(ii) Bestimmen Sie die Wertemenge $f(A)$.

(iii) Ist f injektiv, surjektiv, bijektiv?

Aufgabe$^{\#}$ 3.8 Es seien zwei Funktionen gegeben

$$\begin{array}{ll} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} & \qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ x \mapsto 1 + x^2 & \qquad x \mapsto (1, x^2). \end{array}$$

Bestimmen Sie, welche der Kompositionen existieren, und geben Sie für diese Kompositionen die Funktionsvorschrift explizit an:

$$f \circ g, \quad g \circ f, \quad f \circ f, \quad g \circ g.$$

Aufgabe$^{\#}$ 3.9 Zeigen Sie: $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$. Zeigen Sie allgemein für eine Primzahl p, dass $\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$. (*Hinweis:* Benutzen Sie Existenz und Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung.)

Aufgabe$^{\#}$ 3.10 Beweisen Sie die folgenden Identitäten:

a) $(x-1)\sum_{k=0}^{n-1} x^k = x^n - 1$, insbesondere $\sum_{k=1}^{n} 2^k = 2(2^n - 1)$.

b) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^n}$ und $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$.

Aufgabe$^{\#}$ 3.11 Induktion

a) Zeigen Sie, dass $2n^3 + 4n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 6 teilbar ist.

b) In der Vorlesung wurde die folgende Formel bewiesen:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Können Sie aber, ohne diese Formel zu benutzen, zeigen, dass $n(n+1)(2n+1)$ tatsächlich für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 6 teilbar ist?

c) Ermitteln Sie die Anzahl d_n der Diagonalen (Verbindungsstrecken zwischen zwei Ecken, die keine Kanten sind) in einem ebenen n-Eck für $n \ge 4$. Beweisen Sie Ihre gefundene Formel.

Aufgaben und Aufgabenteile mit # werden **nicht** korrigiert und müssen **nicht** abgegeben werden.