Akad. Rätin Dr. Cynthia Hog-Angeloni
Dr. Anton Malevich

Aufgabe 4.1 Basen in $\mathbb{R}^2$.

a) Es sei $a = (1,1)$, $b = (-1,1)$. Beweisen Sie, dass (a,b) eine Basis von $\mathbb{R}^2$ ist. Berechnen Sie die Koordinaten von $(-1,1)$, $(1,0)$, $(-4,0)$, $(1,5)$ und $(-3,7)$ bezüglich der Basis (a,b).

b) Es seien die Vektoren $a = (\lambda - 1, \lambda)$ und $b = (\mu - 3, \mu)$ gegeben. Für welche $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ist (a,b) eine Basis von $\mathbb{R}^2$?

Aufgabe 4.2 Gleichung- und Parameterdarstellung der Geraden.

a) Bestimmen Sie für die folgenden Geraden je eine Gleichung:

$$(1,1) + \mathbb{R}(-1,0), \quad (1,4) + \mathbb{R}(-1,2), \quad (1,-2) + \mathbb{R}(-1,2).$$

b) Bestimmen Sie die Parameterdarstellung für die folgenden Geraden:

$$2x + y = 6, \quad -x - \frac{1}{2}y = 0, \quad 5y = 5.$$

Aufgabe 4.3 Kollineare Punkte.

a) Es seien a, b, c drei Punkte in $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie: a, b, c liegen genau dann auf einer Geraden, wenn $\det(c - a, b - a) = 0$ ist. (*Hinweis:* Vgl. mit Aufgabe$^{\#}$ 4.8.)

b) Prüfen Sie, ob $(3,2)$, $(6,-1)$, $(2,3)$ auf einer Geraden liegen.

c) Die Punkte $(\lambda, 3)$, $(6,1)$ und $(-3,4)$ liegen auf einer Geraden. Bestimmen Sie λ.

d) Prüfen Sie, ob $(1,3)$, $(4,2)$, $(5,0)$ und $(4,4)$ auf einer Geraden liegen.

Aufgabe 4.4 Für eine Basis (a,b) von $\mathbb{R}^2$ nennt man die lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $A(xa + yb) = xa$ die Parallelprojektion auf $\mathbb{R}a$ entlang b,

a) Bestimmen Sie die Matrix der Parallelprojektion auf $\mathbb{R}(1,0)$ entlang $(0,1)$ sowie die Matrix der Parallelprojektion auf $\mathbb{R}(0,1)$ entlang $(1,0)$.

b) Bestimmen Sie die Matrix der Parallelprojektion A auf $\mathbb{R}(1,1)$ entlang $(-1,1)$. Finden Sie dafür zuerst die Koordinaten der Vektoren $e_1 = (1,0)$ und $e_2 = (0,1)$ bezüglich der Basis $\big((1,1),(-1,1)\big)$.

Aufgabe# 4.5 Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme mithilfe der Cramerschen Regel.

a) $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$,

b) $\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 4x - 5y = 10 \end{cases}$,

c) $\begin{cases} 5x - 7y = 1 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$,

d) $\begin{cases} x\cos\alpha - y\sin\alpha = \cos\beta \\ x\sin\alpha + y\cos\alpha = \sin\beta \end{cases}$.

Aufgabe# 4.6 Hat das Gleichungssystem

$$\begin{cases} x - y = c_1 \\ x + y = c_2, \end{cases}$$

für alle $c = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ eine eindeutige Lösung?

Aufgabe# 4.7 Es sei $a = (-1, 3)$, $b = (2, 1)$.

a) Zeigen Sie, dass (a, b) eine Basis von $\mathbb{R}^2$ ist.

b) Berechnen Sie die Koordinaten von $(-1, 1)$, $(1, 4)$, $(-3, 2)$ und $(0, 7)$ bezüglich der Basis (a, b).

Aufgabe# 4.8

a) Es seien $a, b \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass (a, b) genau dann keine Basis von $\mathbb{R}^2$ ist, wenn es eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ existiert mit $b = \lambda a$ oder $a = \lambda b$ (solche a und b heißen parallel).

b) Es seien $a, b \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass $a + \mathbb{R}b$ genau dann eine Gerade durch $(0, 0)$ ist, wenn $\det(a, b) = 0$ ist.

c) Es seien $a, b, c \in \mathbb{R}^2$. Finden Sie ein Kriterium dafür, dass c auf der Geraden $a + \mathbb{R}b$ liegt.

Aufgabe# 4.9 Es sei die lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben mit

$$A(x, y) = (2x - y)(1, 2).$$

a) Bestimmen Sie die Matrix der Abbildung A.

b) Ist A injektiv, surjektiv, bijektiv?

Aufgabe# 4.10 Es sei $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine nicht injektive lineare Abbildung, die aber keine Nullabbildung ist. Beweisen Sie:

a) $\operatorname{Ker} A := \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid A(x_1, x_2) = (0, 0) \}$ ist eine Gerade durch $(0, 0)$.

b) Das Bild $A(\mathbb{R}^2)$ ist ebenfalls eine Gerade durch $(0, 0)$.