Akad. Rätin Dr. Cynthia Hog-Angeloni
Dr. Anton Malevich

Aufgabe 5.1 Es seien $a = (-1, 1)$, $b = (2, -1)$, $c = (1, 3)$, $\mathcal{B} = (a, b)$, $\mathcal{C} = (c, b)$ und

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ Basen von $\mathbb{R}^2$ sind.

b) Berechnen Sie die Koordinaten von $(1, 0)$ und $(0, 1)$ sowie von a, b und c bezüglich der Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$.

c) Berechnen Sie ${}_{\mathcal{B}}A_{\mathcal{E}}$, ${}_{\mathcal{E}}A_{\mathcal{B}}$ und ${}_{\mathcal{B}}A_{\mathcal{B}}$ sowie ${}_{\mathcal{C}}A_{\mathcal{B}}$ und ${}_{\mathcal{B}}A_{\mathcal{C}}$, wobei $\mathcal{E}$ die Standardbasis bezeichnet.

Aufgabe 5.2 Basis zu einer vorgegebenen Matrix.

a) Es sei $A = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ -4 & -7 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^2$, so dass ${}_{\mathcal{B}}A_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ist diese Basis durch diese Eigenschaft eindeutig bestimmt?

b) Es seien $c, s \in \mathbb{R}$ mit $c^2 + s^2 = 1$, $s \neq 0$. Es sei ferner $A = \begin{pmatrix} c & s \\ s & -c \end{pmatrix}$.

Gibt es eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^2$, so dass ${}_{\mathcal{B}}A_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Falls ja, geben Sie eine solche an!

Aufgabe 5.3 (*8 Punkte*) Es seien $a, b \in \mathbb{R}^2$ mit $\|a\| = \|b\|$. Zeigen Sie, dass $a - b \perp a + b$. Zeichnen Sie ein Bild hierzu.

Stimmt auch die Umkehrung, d.h. folgt aus $a - b \perp a + b$ stets $\|a\| = \|b\|$? (Beweisen Sie oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.)

Aufgabe 5.4 (*18 Punkte*) Spiegelungen von $\mathbb{R}^2$.

a) Es sei A die Spiegelung an der Geraden G mit der Gleichung $3x = 2y$.

(i) Finden Sie einen Richtungsvektor u der Geraden G mit $\|u\| = 1$, sowie einen weiteren Vektor $v \in \mathbb{R}^2$ mit $u \perp v$ und $\|v\| = 1$.

(ii) Offenbar ist $\mathcal{B} = (u, v)$ eine Basis des $\mathbb{R}^2$. Beweisen Sie, dass ${}_{\mathcal{B}}A_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ist. Machen Sie eine Skizze dazu!

(iii) Bestimmen Sie die Matrix $A = {}_{\mathcal{E}}A_{\mathcal{E}}$ ($\mathcal{E}$ ist die Standardbasis).

b) Bestimmen Sie die Matrix der Spiegelung an der Geraden $x = 2y$.

c) Die Matrix $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$ beschreibt eine Spiegelung. Finden Sie die Spiegelungsgerade.

Aufgabe$^{\#}$ 5.5 Es seien $a = (-1,1)$, $b = (2,-1)$, $\mathcal{B} = (a,b)$ und $A = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie ${}_{\mathcal{B}}A_{\mathcal{B}}$.

Aufgabe$^{\#}$ 5.6 Es seien $a = (1,-2)$, $b = (1,3)$, $B = (a,b)$ und $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}$ eine Basis von $\mathbb{R}^2$ ist.

b) Berechnen Sie die Koordinaten von $(1,0)$ und $(0,1)$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$.

c) Berechnen Sie ${}_{\mathcal{B}}A_{\mathcal{E}}$, ${}_{\mathcal{E}}A_{\mathcal{B}}$ und ${}_{\mathcal{B}}A_{\mathcal{B}}$, wobei $\mathcal{E}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$ bezeichnet.

d) Es sei $\mathcal{C} = \big((0,-1),(-1,1)\big)$ eine weitere Basis. Berechnen Sie ${}_{\mathcal{C}}A_{\mathcal{B}}$ sowie ${}_{\mathcal{B}}A_{\mathcal{C}}$.

Aufgabe$^{\#}$ 5.7 Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass es keine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^2$ sowie keine $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gibt, sodass ${}_{\mathcal{B}}A_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$.

Aufgabe$^{\#}$ 5.8 Berechnen Sie die Inversen (falls sie existieren!) folgender Matrizen.

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe$^{\#}$ 5.9 Es seien ABC ein Dreieck mit Seitenlängen $\|C - B\| = a$, $\|C - A\| = b$, $\|B - A\| = c$ und ℓ eine Gerade durch A und B. Es sei D der Fußpunkt von C auf ℓ. Es seien ferner $p = \|D - B\|$, $q = \|D - A\|$ und $h = \|D - C\|$. Nehmen Sie an, dass $C - A \perp C - B$.

a) Zeigen Sie, dass $h^2 = pq$.

b) Beweisen Sie, dass $a^2 = pc$ und $b^2 = qc$.

Bemerkung: Für eine Gerade ℓ und einen Punkt C mit $C \notin \ell$ existiert genau ein Punkt $D \in \ell$, sodass $C - D$ ein Normalenvektor von ℓ ist. Den Punkt D nennen wir den Fußpunkt von C auf ℓ.