

**Aufgabe 6.1** Welche der folgenden Matrizen entsprechen einer Drehung bzw. einer Spiegelung des  $\mathbb{R}^2$ ? Geben Sie bei der Drehung den Drehwinkel und bei der Spiegelung die Spiegelungsgerade an.

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 6.2** Beweisen Sie die folgenden Aussagen mithilfe des Skalarprodukts.

a) Für alle  $a, b \in \mathbb{R}^3$  gilt das Parallelogrammgesetz:

$$\|a + b\|^2 + \|a - b\|^2 = 2 \cdot \|a\|^2 + 2 \cdot \|b\|^2.$$

Interpretieren Sie diesen Satz geometrisch.

b) Für alle  $a, b \in \mathbb{R}^3$  gilt der Cosinussatz:

$$\|a - b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2 \cdot \|a\| \cdot \|b\| \cdot \cos \angle(a, b).$$

c) Für alle  $a, b \in \mathbb{R}^3$  gilt die Dreiecksungleichung:

$$\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|.$$

Interpretieren Sie diese geometrisch. Wann tritt Gleichheit auf?

**Aufgabe 6.3** (6 Punkte) Bestimmen Sie für die Vektoren  $a, b \in \mathbb{R}^3$  den Abstand von  $b$  zur Geraden  $\mathbb{R} \cdot a$ , indem sie zuerst den Lotfußpunkt  $L_a(b)$  von  $b$  auf  $\mathbb{R} \cdot a$  berechnen.

a)  $a = (1, 1, 1)$ ,  $b = (4, 2, 3)$ ,

b)  $a = (0, 1, 1)$ ,  $b = (1, 2, 4)$ .

**Aufgabe 6.4** (18 Punkte) Es sei  $\Delta \subset \mathbb{R}^3$  ein Dreieck mit Ecken

$$0 = (0, 0, 0), \quad u = \frac{1+\sqrt{3}}{3} (1, 2, 2) \quad \text{und} \quad v = \left( \frac{1}{3}, \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

a) Bestimmen Sie die Seitenlängen des Dreiecks  $\Delta$ .

b) Berechnen Sie die Eckwinkel von  $\Delta$  (in Bogenmaß). Ist  $\Delta$  rechtwinklig? (Wie kann man ohne Berechnung der Eckwinkel entscheiden, ob das Dreieck rechtwinklig ist?)

c) Skizzieren Sie das Dreieck!

d) Bestimmen Sie den Höhenvektor von  $v$  auf die gegenüberliegende Seite.

Berechnen Sie außerdem jeweils den Abstand zwischen jeder Ecke und der Geraden, die die gegenüberliegende Seite enthält.

e) Berechnen Sie den Flächeninhalt von  $\Delta$ .

f) Bestimmen Sie den Höhenschnittpunkt von  $\Delta$ .

**Aufgabe# 6.5** Drehungen und Spiegelungen

- a) Zeigen Sie, dass das Produkt zweier Spiegelungen eine Drehung ist.
- b) Zeigen Sie, dass man jede Drehung  $R_{c,s}$  als Produkt zweier Spiegelungen schreiben kann.

**Aufgabe# 6.6** Es sei der Dreieck mit Ecken  $\theta = (0,0)$ ,  $u = (2,2)$ ,  $v = (3,0)$  gegeben.

- a) Bestimmen Sie die Seitenlängen und die (Cosinus der) Eckwinkel.
- b) Bestimmen Sie eine Gleichung der Höhenggeraden von  $v$  auf die gegenüberliegende Seite.
- c) Bestimmen Sie den Abstand zwischen  $\theta$  und der Geraden, die die gegenüberliegende Seite enthält.
- d) Bestimmen Sie Gleichungen der Seitenhalbierenden und Parameterdarstellungen der Mittelsenkrechten des Dreiecks.
- e) Bestimmen Sie eine Gleichung und eine Parameterdarstellung der Winkelhalbierenden von  $u$ .

**Aufgabe# 6.7** Beweisen Sie, dass ein Parallelogramm mit gleich langen Diagonalen stets ein Rechteck ist.