Akad. Rätin Dr. Cynthia Hog-Angeloni
Dr. Anton Malevich

Aufgabe 7.1 Es seien die folgenden fünf Punkte im $\mathbb{R}^3$ gegeben:

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass die Punkte a, b, und c nicht auf einer Geraden liegen. Geben Sie eine Parameterdarstellung und eine Gleichung der Ebene E durch a, b, und c an.

b) Liegen auch die Punkte d bzw. e in der Ebene E? Falls nein, berechnen Sie den Schnittpunkt von E und der Geraden $\mathbb{R} \cdot d$ bzw. $\mathbb{R} \cdot e$.

Aufgabe 7.2 Es seien die folgenden vier Punkte im $\mathbb{R}^3$ gegeben:

$$a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ r \end{pmatrix}.$$

Für welche Werte des Parameters $r \in \mathbb{R}$ sind die Geraden G_1 durch Punkte a und b und G_2 durch Punkte c und d parallel? Schneiden sich die beiden Geraden für $r = -3$?

Aufgabe 7.3 Es seien im $\mathbb{R}^3$ die Ebene E_1 durch die Punkte $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ sowie die Ebene $E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ gegeben.

a) Finden Sie eine Parameterdarstellung sowie eine Gleichung der Ebene E_1.

b) Sind die Ebenen E_1 und E_2 parallel? Bestimmen Sie den Durchschnitt $E_1 \cap E_2$.

c) Es sei $E_3 = \{ (x, y, z) \mid x + y - z = 0 \}$. Bestimmen Sie $E_1 \cap E_2 \cap E_3$.

Aufgabe 7.4 Determinanten

a) Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -3 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $A \cdot B$ und $B \cdot A$ sowie $\det A$, $\det B$, $\det(A \cdot B)$, $\det(B \cdot A)$. (Benutzen Sie die Aufgabe$^{\#}$ 7.9 nicht!)

b) Berechnen Sie die folgende Determinante in Abhängigkeit von $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & b & -1 \end{vmatrix}.$$

c) Beweisen Sie für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b - a)(c - a)(c - b).$$

Aufgabe# 7.5 Parallele Ebenen.

a) Es seien im $\mathbb{R}^3$ drei Ebenen gegeben:

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 2x - 3y + z = 1 \right\} \text{ sowie}$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } E_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Warum sind E_1, E_2 und E_3 parallele Ebenen? Sind welche davon gleich?

b) Es seien im $\mathbb{R}^3$ die Ebene E_1 durch die Punkte $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ sowie die Ebene $E_2 = \{(x, y, z) \mid 3x + y + 2z + 2 = 0\}$ gegeben. Sind diese Ebenen parallel? Bestimmen Sie den Durchschnitt $E_1 \cap E_2$.

Aufgabe# 7.6 Es seien in $\mathbb{R}^3$ drei Geraden gegeben:

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad G_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad G_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Welche Paare dieser Geraden sind parallel, windschief, schneiden sich? (Zwei Geraden in $\mathbb{R}^3$, die sich nicht schneiden, aber auch nicht parallel sind, heißen windschief.) Begründen Sie und geben Sie gegebenenfalls den Schnittpunkt an!

Aufgabe# 7.7 Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme:

$$\left\{ \begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= -2 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= -3 \end{aligned} \right. , \quad \left\{ \begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= -3 \end{aligned} \right. , \quad \left\{ \begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= 2 \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 &= 5 \end{aligned} \right. .$$

Aufgabe# 7.8 Determinanten

a) Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $A \cdot B$, $B \cdot A$ und A^2 sowie $\det A$, $\det B$, $\det(A \cdot B)$, $\det(B \cdot A)$ und $\det A^2$.

b) Berechnen Sie folgende Determinante in Abhängigkeit von $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & a+b & b \\ 0 & a & 0 \end{vmatrix}.$$

Aufgabe# 7.9 Es seien A, B zwei 3×3 Matrizen. Zeigen Sie: $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$. (Hinweis: Es gilt $\det A = \langle a_1, a_2 \times a_3 \rangle$, wobei a_1, a_2, a_3 Spalten von A sind. Berechnen Sie also zuerst das Vektorprodukt der letzten beiden Spalten von $A \cdot B$ unter Beachtung der Rechenregeln fürs Vektorprodukt.)