Akad. Rätin Dr. Cynthia Hog-Angeloni
Dr. Anton Malevich

Aufgabe 8.1 Es seien vier Punkte in $\mathbb{R}^3$ gegeben:

$$a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ c = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } d = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie das Volumen des Tetraeders mit den Ecken a, b, c, d (ein Sechstel des Spatvolumens!) und die Flächeninhalte seiner vier Seitenflächen!

b) Es sei G die Gerade durch b und c. Bestimmen Sie den Abstand zwischen a und G bzw. zwischen d und G.

c) Berechnen Sie den Abstand zwischen jedem der vier Ecken des Tetraeders und der Ebene, die die gegenüberliegenden Seite enthält.

d) Es sei G_1 die Gerade durch a und b, G_2 die Gerade durch c und d. Bestimmen Sie den Abstand zwischen G_1 und G_2.

Aufgabe 8.2 Gegeben seien im $\mathbb{R}^3$ die Punkte a, b, c und p sowie die Gerade G_1:

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ c = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ p = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad G_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ferner bezeichne E die Ebene durch a, b und c, und G_2 die Gerade durch a, die orthogonal zur Ebene E ist.

a) Berechnen Sie jeweils den Abstand zwischen p und G_1, p und E, G_1 und G_2.

b) Geben Sie eine Gleichung für E an und bestimmen Sie die Schnittmenge $E \cap G_1$. Was ist der Abstand zwischen G_1 und E?

c) Finden Sie den Punkt p', der durch Spiegelung von p an G_1 entsteht, sowie den Punkt p'', der durch Spiegelung von p an E entsteht.

Aufgabe 8.3 Es sei $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie A^{-1} mittels

a) elementarer Zeilenumformungen;

b) der adjunkten Matrix A^{ad};

c) der Cramerschen Regel: Man findet die Spalte s_i, $i \in \{1, 2, 3\}$, von A^{-1} als Lösung des Gleichungssystems $As_i = e_i$ (e_i sind die Standardbasisvektoren).

Aufgabe 8.4 Es bezeichne (e_1, e_2, e_3) die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$. Begründen Sie, warum es eine lineare Abbildung A gibt mit

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = e_1, \quad A\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = e_2, \quad A\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_3.$$

Bestimmen Sie die Matrix dieser Abbildung.

Aufgabe# 8.5 Zeigen Sie für 3×3 Matrizen A, B: $\mathrm{Sp}(A \cdot B) = \mathrm{Sp}(B \cdot A)$.
(Die Spur $\mathrm{Sp}(A)$ einer Matrix A ist die Summe der Diagonaleinträge.)

Aufgabe# 8.6 Lösen Sie das folgende Gleichungssystem mit der Cramerschen Regel:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 \phantom{{}+x_3} &= \alpha \\ x_2 + x_3 &= \beta. \end{aligned}$$

Aufgabe# 8.7 Berechnen Sie $t^2 x_2(t) + x_3(t)$, wobei $x_2(t)$ und $x_3(t)$ durch das folgende Gleichungssystem definiert sind:

$$\begin{aligned} x_1 + \ tx_2 + t^2 x_3 &= t^4 \\ t^2 x_1 + \ \ x_2 + \ tx_3 &= t^3 \\ tx_1 + t^2 x_2 + \ \ x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Aufgabe# 8.8 Kürzeste Kommunikationswege.
Auf zwei windschiefen Geraden $G = a + \mathbb{R}u$ und $H = b + \mathbb{R}v$ im Raum patrouilliert je ein Raumschiff p und q.

Warum ist der Abstand zwischen p und q minimal genau dann, wenn die Verbindungsstrecke senkrecht auf G und H steht? Finden Sie eine Formel für diese optimalen Positionen von p und q mit Hilfe von a, b, u und v.