Akad. Rätin Dr. Cynthia Hog-Angeloni
Dr. Anton Malevich

Aufgabe 9.1 (aka **Aufgabe 8.3**)
Es sei $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie A^{-1} mittels

a) elementarer Zeilenumformungen;

b) der adjunkten Matrix A^{ad};

c) der Cramerschen Regel: Man findet die Spalte s_i, $i \in \{1, 2, 3\}$, von A^{-1} als Lösung des Gleichungssystems $As_i = e_i$ (e_i sind die Standardbasisvektoren).

Aufgabe 9.2 (aka **Aufgabe 8.4**) Es bezeichne (e_1, e_2, e_3) die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$. Begründen Sie, warum es eine lineare Abbildung A gibt mit

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = e_1, \quad A\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = e_2, \quad A\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_3.$$

Bestimmen Sie die Matrix dieser Abbildung.

Aufgabe 9.3 In dieser Aufgabe bezeichnen wir mit $\gamma_{\mathcal{B}}(v)$ die Koordinaten eines Vektors $v \in \mathbb{R}^3$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$. Es gilt also

$$\gamma_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow v = xb_1 + yb_2 + zb_3,$$

wobei $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ ist.

a) Es seien die Vektoren $b_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, und $b_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^3$ gegeben. Beweisen Sie, dass $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist.

b) Es sei $v = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die Koordinaten von v bezüglich der Basis $\mathcal{B}$.

c) Es sei $w \in \mathbb{R}^3$ gegeben mit $\gamma_{\mathcal{B}}(w) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie w.

d) Es sei $\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ eine weitere Basis von $\mathbb{R}^3$. Es sei $u \in \mathbb{R}^3$ gegeben mit $\gamma_{\mathcal{C}}(u) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie u sowie die Koordinaten von u bezüglich $\mathcal{B}$. Bestimmen Sie außerdem die Koordinaten von v und w aus Teil b) bzw. c) bezüglich der Basis $\mathcal{C}$.

Aufgabe 9.4 Es sei $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ und es sei $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ eine weitere Basis von $\mathbb{R}^3$ mit

$$e_1 = \frac{1}{3}b_1 - \frac{1}{3}b_3, \quad e_2 = \frac{1}{2}b_1 - \frac{1}{2}b_2, \quad e_3 = \frac{1}{6}b_1 - \frac{1}{2}b_2 - \frac{1}{3}b_3.$$

a) Finden Sie b_1, b_2 und b_3.

b) Es sei die lineare Abbildung A gegeben durch

$$A(b_1) = b_1 + 2b_3, \quad A(b_2) = 2b_1 + b_2 - b_3, \quad A(b_3) = b_2 + b_3.$$

Bestimmen Sie die Matrizen ${}_{\mathcal{B}}A_{\mathcal{B}}$ und $A = {}_{\mathcal{E}}A_{\mathcal{E}}$.

Aufgabe$^{\#}$ 9.5 Es seien in $\mathbb{R}^3$ die folgenden vier Vektoren gegeben:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Wählen Sie drei dieser vier Vektoren, die eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden.

b) Berechnen Sie die Koordinaten aller vier Vektoren bezüglich Ihrer Basis aus Teil a).

Aufgabe$^{\#}$ 9.6 Schreiben Sie die adjunkte Matrix einer 3×3 Matrix A allgemein hin (korrigieren Sie dabei den Tippfehler im Buch) und rechnen Sie nach, dass $A^{\mathrm{ad}}A = (\det A)I$, wobei I die 3×3 Einheitsmatrix bezeichnet.

Aufgabe$^{\#}$ 9.7 Es sei $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ sowie $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ und $\mathcal{C} = (c_1, c_2, c_3)$ zwei weitere Basen von $\mathbb{R}^3$ mit

$$e_1 = \frac{1}{3}b_1 - \frac{1}{3}b_3, \quad e_2 = \frac{1}{2}b_1 - \frac{1}{2}b_2, \quad e_3 = \frac{1}{6}b_1 - \frac{1}{2}b_2 - \frac{1}{3}b_3$$

sowie

$$c_1 = e_1 + e_2 + e_3, \quad c_2 = e_1 + e_3, \quad c_3 = e_1 - e_2.$$

a) Es sei die lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$A(b_1) = c_1, \quad A(b_2) = c_2, \quad A(b_3) = c_1 + c_2$$

Bestimmen Sie die Darstellungsmatrizen $A = {}_{\mathcal{E}}A_{\mathcal{E}}$, ${}_{\mathcal{B}}A_{\mathcal{B}}$ sowie ${}_{\mathcal{C}}A_{\mathcal{C}}$.

b) E sei die lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch ihre Darstellungsmatrix

$${}_{\mathcal{C}}A_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Matrizen $A = {}_{\mathcal{E}}A_{\mathcal{E}}$, ${}_{\mathcal{B}}A_{\mathcal{C}}$, ${}_{\mathcal{C}}A_{\mathcal{B}}$ sowie ${}_{\mathcal{B}}A_{\mathcal{B}}$.