Dr. Cynthia Hog-Angeloni
Laura Biroth, M.Sc.
Institut für Mathematik
Johannes Gutenberg-Universität Mainz

Topologie
WS 2016/17

Übungsblatt 6

1. **Produkte**

   Es seien (X, x_0) und (Y, y_0) zwei punktierte topologische Räume. Zeigen Sie:

   $$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$$

   (25 Punkte)

2. **Schleifenraum**

   Wir bezeichnen mit S^1 den Einheitskreis und mit $D^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \|z\| \leq 1\}$ die Einheitskreisscheibe. Die Menge

   $$\Omega(X, x_0) := \{f \colon S^1 \to X \mid f \text{ stetig, mit } f(1) = x_0\}$$

   heißt *Schleifenraum* des topologischen Raums X am Punkt x_0.

   a) Zeigen Sie, dass der Schleifenraum kanonisch bijektiv zum Wegeraum $W(X; x_0)$ ist.

   b) Sei γ nullhomotoper Weg, $\overline{\gamma}$ zugehörige Schleife (nach a). Zeigen Sie, dass die Menge $\mathcal{H}$ der Nullhomotopien für γ kanonisch bijektiv zur Menge der Fortsetzungen $h \colon D^2 \to X$ von $\overline{\gamma}$ ist.

   (25 Punkte)

3. **$\boldsymbol{\pi_0(X)}$**

   Für einen topologischen Raum X bezeichne $\pi_0(X)$ die Menge der Wegkomponenten von X.

   Eine *topologische Gruppe* ist ein Hausdorffraum G, auf dem eine Verknüpfung $\cdot \colon G \times G \to G$ mit den folgenden Eigenschaften gegeben ist:
   i) $(G; \cdot)$ ist eine Gruppe;
   ii) Die Verknüpfung $\cdot \colon G \times G \to G$ ist stetig;
   iii) Die Inversenbildung $G \to G$, $g \mapsto g^{-1}$ ist stetig.

   Es sei nun G eine topologische Gruppe. Zeigen Sie:

   a) $\pi_0(G)$ trägt eine Gruppenstruktur, bezüglich der die kanonische Abbildung $G \to \pi_0(G)$ ein Homomorphismus ist.

   b) $U := \{g \in G \mid g \in [e]\}$ ist ein Normalteiler.

4. **Lösbarkeit gewisser polynomieller Gleichungssysteme**

Gegeben sei ein polynomielles Gleichungssystem

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_{ij} x^i y^j = 0$$

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} b_{ij} x^i y^j = 0$$

in zwei reellen Variablen x, y aus dem Rechteck $|x| \leq r, |y| \leq s$. Dabei nehmen wir an, $a_{10} \neq 0 \neq b_{01}$.

Geben Sie Bedingungen an die Koeffizienten a_{ij}, b_{ij} an, unter denen Sie die Existenz einer Lösung garantieren können.

(25 Punkte)