Dr. Cynthia Hog-Angeloni
Laura Biroth, M.Sc.
Institut für Mathematik
Johannes Gutenberg-Universität Mainz

Topologie
WS 2016/17

Übungsblatt 7

1. **Freie Gruppen**

   Wir betrachten die drei freien Gruppen

   $$F_1 = \mathbb{Z},\ F_2 = \langle s, t\ |-\rangle,\ F_\infty = \langle a_i \mid i \in \mathbb{Z}\rangle.$$

   Es seien Homomorphismen $\alpha\colon F_\infty \to F_2$ definiert durch $a_i \mapsto s^i t s^{-i}$ und $\beta\colon F_2 \to \mathbb{Z}$ definiert durch $s \mapsto 1, t \mapsto 0$.

   Zeigen Sie: Die Sequenz $\{e\} \to F_\infty \xrightarrow{\alpha} F_2 \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z} \to \{e\}$ ist exakt, m. a. W.

   a) α ist injektiv.
   b) β ist surjektiv.
   c) Das Bild von α ist gleich dem Kern von β.

   (Sie können benutzen, dass jedes Element einer freien Gruppe ein eindeutiges gekürztes Wort als Repräsentanten besitzt.)

   d) Skizzieren Sie das Dehnsche Gruppenbild für F_2.

   (20 Punkte)

2. **Satz von Seifert van Kampen**

   Es sei $X = U \cup V$ mit $U, V, U \cap V$ offen, nichtleer und wegzusammenhängend, $x_0 \in U \cap V$ Basispunkt. Gegeben sei eine Homotopie $H\colon I \times I \to X$ zwischen $\gamma_0 \bullet \delta_0$ und $\gamma_1 \bullet \delta_1$, wobei die geschlossenen Wege γ_i ganz in U und δ_i ganz in V liegen. Weiter soll H die ganze linke Hälfte $[0, \frac{1}{2}] \times I$ nach U und die ganze rechte Hälfte $[\frac{1}{2}, 0] \times I$ nach V abbilden.

   a) Zeigen Sie, dass sich $[\gamma_0]\cdot[\delta_0]$ mit Hilfe der Relationen von $\pi_1(U, x_0) *_{\pi_1(U\cap V, x_0)} \pi_1(V, x_0)$ in $[\gamma_1]\cdot[\delta_1]$ überführen lässt.
   b) Folgern Sie die Injektivität des von den kanonischen Inklusionen induzierten Homomorphismus $\varphi\colon \pi_1(U, x_0) *_{\pi_1(U\cap V, x_0)} \pi_1(V, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$.
   c) Geben Sie ein Beispiel an, für das $\pi_1(U \cap V, x_0) \neq \{e\}$ aber $\pi_1(X, x_0) = \{e\}$

   (25 Punkte)

3. **Endliche Präsentationen**

Finden Sie eine Präsentation

a) der Diedergruppe D_3 (Isometriegruppe eines regelmäßigen Dreiecks).

b) der symmetrischen Gruppe S_3.

c) des freien Produkts zweier durch endliche Präsentationen $\mathcal{P} = \langle a_1, \ldots, a_n \mid R_1, \ldots, R_m \rangle$ und $\mathcal{Q} = \langle b_1, \ldots, b_k \mid S_1, \ldots, S_\ell \rangle$ gegebenen Gruppen.

d) Der *Defekt* einer endlich präsentierten Gruppe G ist das Minimum über ($\sharp$ Relatoren minus $\sharp$ Erzeuger) einer Präsentation von G. Vermuten Sie, dass der Defekt additiv unter der Bildung des freien Produkts ist? (Antwort „ja“ oder „nein“ genügt).

(25 Punkte (je 8 für a-c und 1 für Aufgabenteil d))

4. **Berechnung von Fundamentalgruppen**

Berechnen Sie die Fundamentalgruppe

a) eines endlichen Graphen Γ.

b) der Ringwurst.

c) der Kleinschen Flasche.

d) der 3-Mannigfaltigkeit $S^1 \times S^1 \times S^1$.

e) der zusammenhängenden Summe von n projektiven Ebenen $\mathbb{R}P^2 \# \ldots \# \mathbb{R}P^2$.

(Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass die Fundamentalgruppe der Einpunktvereinigung $X_1 \vee X_2$ zweier CW-Komplexe X_1 und X_2, deren Basispunkte x_1 und x_2 miteinander verklebt werden, gleich dem freien Produkt der Fundamentalgruppen der X_i ist.)

(30 Punkte)