Dr. Cynthia Hog-Angeloni
Laura Biroth, M.Sc.
Institut für Mathematik
Johannes Gutenberg-Universität Mainz

Topologie
WS 2016/17

Übungsblatt 9

1. **Torus-Überlagerungen**

   Bestimmen Sie alle topologischen Räume, die als Überlagerungsräume des zweidimensionalen Torus' auftreten und ihre charakteristischen Untergruppen.

   (15 Punkte)

2. **Weitere Flächen-Überlagerungen**

   Wir betrachten noch einmal die Quotienten: Torus, projektive Ebene, und Kleinsche Flasche des Quadrats $[0,1] \times [0,1]$ unter Kantenidentifizierung. Welcher Raum kann als Überlagerung eines der beiden anderen Räume auftreten?

   (20 Punkte)

3. **Decktransformationen**

   Berechnen Sie die Gruppe der Decktransformationen für die Überlagerungen der Kreislinie:

   a) $p_0 \colon (\mathbb{R}, 0) \to (S^1, 1)$, $t \mapsto e^{2\pi i t}$
   b) $p_n \colon (S^1, 1) \to (S^1, 1)$, $t \mapsto t^n$

   Zeigen Sie außerdem

   c) dass jede Decktransformation φ transitiv auf der Faser $p^{-1}(1)$ operiert
   d) dass sich jede der Überlagerungen p_n durch p_0 überlagern lässt (d.h. es existiert jeweils eine Überlagerung $p'_n \colon \mathbb{R} \to S^1$ mit $p_n \circ p'_n = p_0$)
   e) dass sich die Überlagerung p_n durch p_m überlagern lässt genau dann wenn $n|m$.

   (25 Punkte)

4. **Spezielle orthogonale Gruppe**

   Im folgenden bezeichne $\mathbb{H}$ den Schiefkörper der Quaternionen,

   $$\mathbb{H} = \{x + iy + jz + kw \mid x, y, z, w \in \mathbb{R}\}$$

   s. etwa Ebbinghaus et al., *Zahlen*, Springer 1983.

   Das Skalarprodukt auf $\mathbb{H}$ lässt sich schreiben als $\langle x, y\rangle = Re(x\bar{y}) = \frac{1}{2}(x\bar{y} + y\bar{x}) = \langle 1, \bar{y}\rangle$. Hierbei bezeichnet $\bar{q}$ wie im Komplexen das konjugierte Quaternion $x - iy - jz - kw$ zu $q = x + iy + jz + kw$.

   Wir identifizieren die Sphäre S^3 mit der Menge $\{q \in \mathbb{H} \mid |q| = 1\}$ der Einheitsquaternionen und $\mathbb{R}^3$ mit dem Unterraum der imaginären Quaternionen in $\mathbb{H}$.

a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\varphi\colon S^3 \to SU(2)$, definiert durch $x+iy+jz+kw \mapsto \begin{pmatrix} x+iy & -z-iw \\ z-iw & x-iy \end{pmatrix}$ ein Isomorphismus ist.

Daher identifizieren wir nun $SU(2)$ mit $S^3 \subset \mathbb{H}$.

Für $q \in SU(2)$ sei $c_q\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ die durch $c_q(x) = qxq^{-1}$ definierte Abbildung (Konjugation mit einem festen Einheitsquaternion).

b) Zeigen Sie, dass c_q eine Isometrie auf $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{H}$ ist, und dass die Vorschrift $q \mapsto c_q|\mathbb{R}^3$ einen Homomorphismus von S^3 nach $SO(3)$ liefert.

c) Zeigen Sie, dass es sich hierbei um eine zweiblättrige Überlagerung handelt, die antipodale Punkte identifiziert.

d) Folgern Sie, $SO(3) = \mathbb{R}P^3$, $\pi_1(SU(2)) = \{1\}$ und $\pi_1(SO(3)) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(40 Punkte)

Die Online-Plattform für Ihre HiWi-Bewerbung zum Sommersemester 2017 ist ab sofort geöffnet. Alle qualifizierten InteressentInnen werden um ihre Bewerbung gebeten.