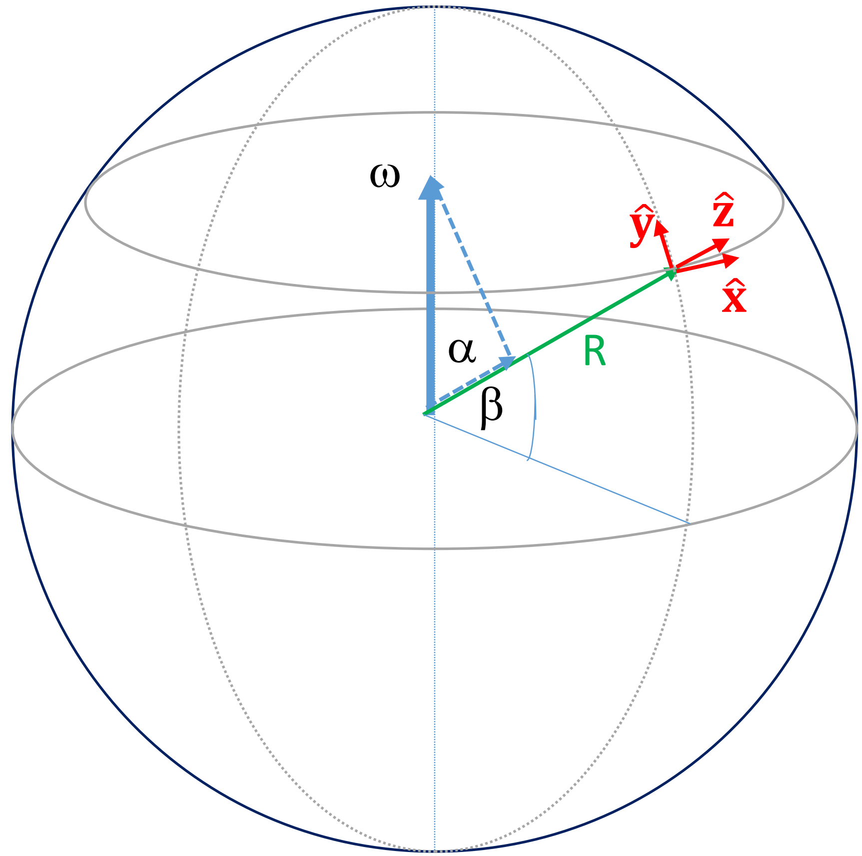
Corioliskraft,
Freier Fall in Mainz

β = 50° ; α = 40°
x,y,z Koordinatensystem am Fusspunkt des Domes fest, z nach oben, x nach Osten y nach Norden;
R= Vektor Erdmittelpunkt-Dom



Damit hat ω
Komponenten in y und z !

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} 0 \\ \sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix}$$

Fallender Körper um t=0 startet bei

$$\mathbf{r}_{start} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{v}_{start} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solange die Ablenkung durch die Corioliskraft sehr klein ist gegen Erdradius ist g || z

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix}$$

(entsprechend kann nächste Folie übersprungen werden)

Richtungsabhängigkeit von g

Erdbeschleunigung wirkt immer in Richtung Erdmittelpunkt !
Daher ist g=g(x,y,z) richtungsabhängig wenn wir das Mainzer Koordinatensystem nutzen z.B. am Punkt

$$\mathbf{r}' = \mathbf{R} + \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ R+z \end{pmatrix}$$

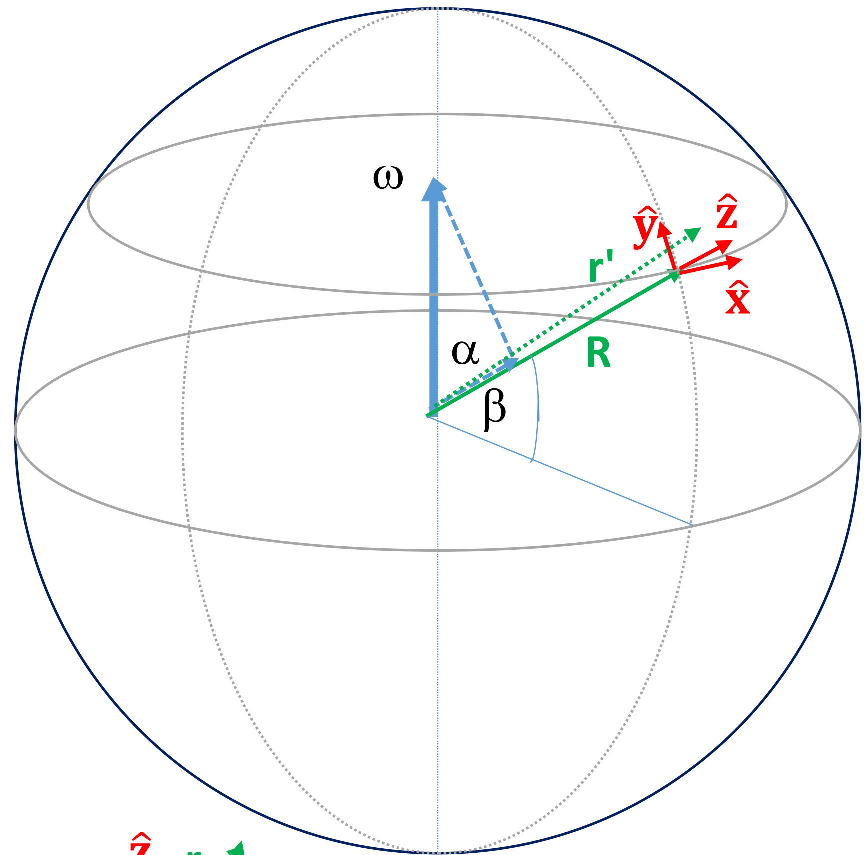
$$\mathbf{g} = g \begin{pmatrix} \cos\phi \sin\gamma \\ \sin\phi \sin\gamma \\ \cos\gamma \end{pmatrix}$$

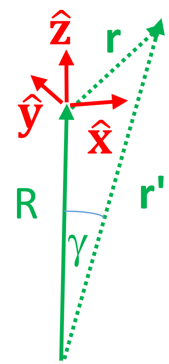
$$\cos\gamma = \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{R}}{|\mathbf{r}'||\mathbf{R}|} = \frac{Rz}{\sqrt{x^2 + y^2 + (R+z)^2}R}$$

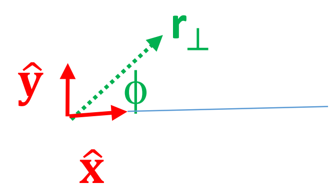
$$\cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + (R+z)^2}}$$

$$\sin\gamma = \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{R}|}{|\mathbf{r}'||\mathbf{R}|} = \frac{\left|yR\,\mathbf{e}_x - xR\,\mathbf{e}_y\right|}{\sqrt{x^2 + y^2 + (R+z)^2}R}$$

$$\sin\gamma = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + (R+z)^2}}$$





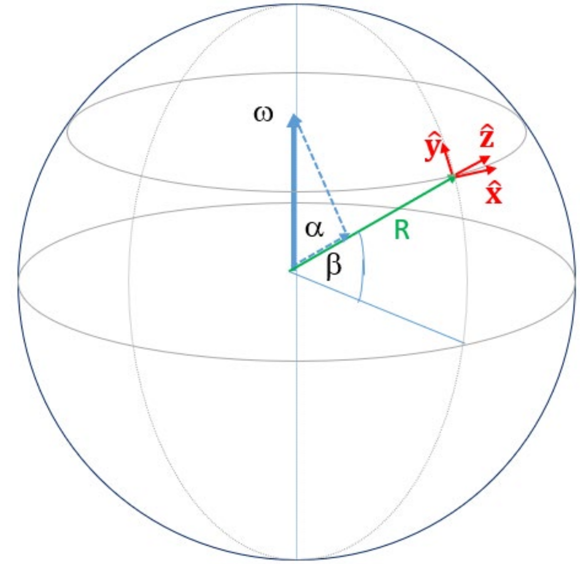


Falls der Betrag von **r**‘ sehr verschieden von R wäre, müsste man noch Abstandsabhängigkeit berücksichtigen *g*=*g*(*r*‘)

Beides wird im Folgenden nicht berücksichtigt, d.h. gilt für $x^2 + y^2 + z^2 \ll R^2$

Corioliskraft, Freier Fall in Mainz

Coriolisbeschleunigung $\mathbf{a}_c = 2\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}$ Mit $\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix}$



$$\mathbf{a}_c = 2\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} v_y\omega_z - v_z\omega_y \\ v_z 0 - v_x\omega_z \\ v_x\omega_y - v_y 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} v_y\omega_z - v_z\omega_y \\ -v_x\omega_z \\ v_x\omega_y \end{pmatrix}$$

Wir „sehen“ bereits dass ω_z und ω_y von gleicher Größenordnung sind
und dass zu Beginn nur v_z beitragen kann;
Die v_z Komponente bewirkt eine Beschleunigung in x Richtung (Ostablenkung)
Hierdurch entsteht eine Geschwindigkeit v_x
Die v_x Komponente bewirkt eine Beschleunigung in y und z Richtung
d.h. es tritt auch eine Südablenkung auf!

Quantitativ: Für eindimensionalen Fall mit zeitabhängiger Beschleunigung:

$$s(t) = s_0 + \int_0^t v(t')dt' \quad \text{und} \quad v(t') = \int_0^{t'} a(t'')dt'' \quad \text{d.h.} \quad s(t) = s_0 + \int_0^t \int_0^{t'} a(t'')dt''\,dt'$$

Analog für den dreidimensionalen fall, bzw. jede Geschwindigkeitskomponente mit der Gesamtbeschleunigung $\mathbf{a} = \mathbf{g} + \mathbf{a}_C$

In drei Dimensionen

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \\ a_z(t) \end{pmatrix} = \mathbf{g} + \mathbf{a}_\mathrm{c} = 2\begin{pmatrix} v_y\omega_z - v_z\omega_y \\ -v_x\omega_z \\ v_x\omega_y - g/2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} \omega_z \int_0^t a_y(t')dt' - \omega_y \int_0^t a_z(t')dt' \\ -\omega_z \int_0^t a_x(t')dt' \\ \omega_y \int_0^t a_x(t')dt' - g/2 \end{pmatrix}$$

Ergeben sich gekoppelte Integralgleichungen für die Koeffizienten!
Diese sind analytisch schwierig zu lösen, aber numerisch sehr einfach
Mit den Anfangsbedingungen:

$$\boldsymbol{v}(t=0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{r}(t=0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{pmatrix} \qquad \mathbf{a}(t=0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix}$$

Können wir diese Differentialgleichungen analytisch näherungsweise lösen, und entkoppeln
da die Terme ω_i v_j klein sind gegen g/2 (gilt für Fall von Turm, aber nicht unbedingt für Absturz Satellit, Hurrikan etc.)

Mit

$$\omega = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600\mathrm{s}} = 7{,}27 \cdot 10^{-5}\,\frac{1}{\mathrm{s}}$$

Ist z.B.: $\omega v < 0{,}01\,\dfrac{g}{2}$ Erfüllt für: $v < 0{,}01\,\dfrac{g}{2\omega} = 675\mathrm{m/s}$

Wir berechnen zunächst die dominierende Beschleunigung = z Komponente approximativ

$$a_z(t) = 2v_x\omega_y - g \approx -g; \qquad v_z(t) \approx -gt; \qquad z(t) \approx h - \frac{g}{2}t^2;$$

Und erhalten daraus $t_{Fall} \approx \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2\cdot 83}{9.81}}\,\mathrm{s} = 4.114\mathrm{s};$ $\quad v_{z,max} \approx \sqrt{2gh} = \sqrt{2\cdot 9.81\cdot 83}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 40.35\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 145{,}3\ \mathrm{km/h};$

Die zweitgrößte Komponente ist die x-Komponente, da $v_z \gg v_x$, v_y und ω_z/ω_y von Größenordnung 1 für Mainz :

$$a_x(t) = 2v_y\omega_z - 2v_z\omega_y \approx -2v_z\omega_y = 2gt\omega_y;$$

$$v_x(t) = \int_0^t a_x(t')dt' = \int_0^t 2gt'\omega_y dt' = g\omega_y t^2;$$

$$x(t) = \int_0^t v_x(t')dt' = \int_0^t g\omega_y t'^2 dt' = \frac{1}{3}g\omega_y t^3;$$

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \\ a_z(t) \end{pmatrix} = \mathbf{g} + \mathbf{a}_\mathrm{c} = 2\begin{pmatrix} v_y\omega_z - v_z\omega_y \\ -v_x\omega_z \\ v_x\omega_y - g/2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{x(t_{Fall}) = \frac{1}{3}g\omega_y\left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{3}{2}} = 1{,}06\mathrm{cm};}$$

In positive x-Richtung = Ostablenkung

Die kleinste Komponente ist die y-Komponente, da $v_z \gg v_x$:

$$a_y(t) = -2v_x\omega_z = -2g\omega_y\omega_z\, t^2;$$

$$v_y(t) = \int_0^t a_y(t')dt' = -\int_0^t 2g\omega_y\omega_z\, t'^2 dt' = -\frac{2}{3}g\omega_y\omega_z\, t^3;$$

$$\mathrm{y}(t) = \int_0^t v_y(t')dt' = -\frac{2}{3}\int_0^t g\omega_y\omega_z\, t'^3 dt' = -\frac{1}{6}g\omega_y\omega_z\, t^4;$$

$$\mathrm{y}(t_{Fall}) = -\frac{1}{6}g\omega_y\omega_z\left(\frac{2h}{g}\right)^2 = -1{,}2\ \mu\mathrm{m};$$

In negative y-Richtung = Südablenkung
sehr klein, aber nicht exakt null

Im Prinzip lässt sich mit dem berechneten v_x die Fallzeit korrigieren:

$$a_z(t) = 2v_x\omega_y - g = 2\left(g\omega_y t^2\right)\omega_y - g = 2g\omega_y^2 t^2 - g;$$

$$v_z(t) = \int_0^t a_z(t')dt' = \int_0^t (2g\omega_y^2 t'^2 - g)\, dt' = \frac{2}{3} g\omega_y^2 t^3 - gt;$$

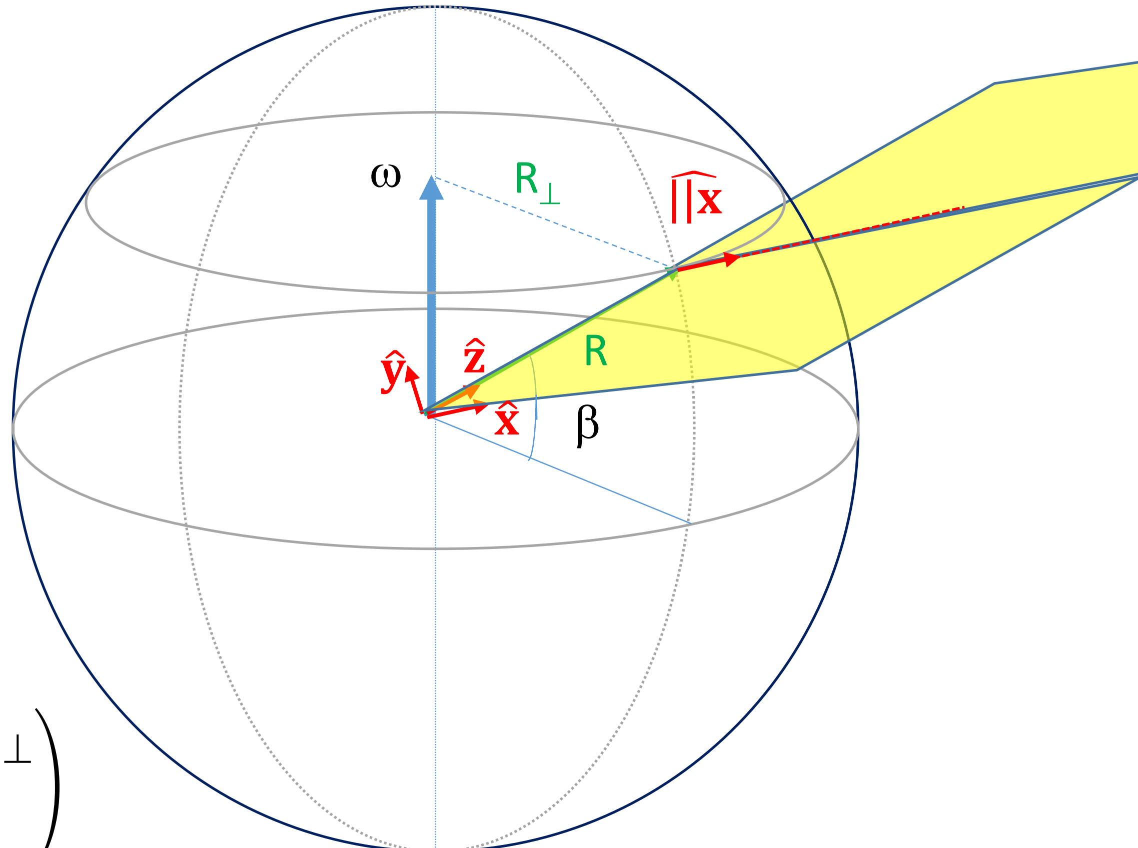
$$\mathrm{z}(t) = h + \int_0^t v_z(t')dt' = h + \int_0^t (\frac{2}{3} g\omega_y^2 t^3 - gt)dt' = h + \frac{1}{6} g\omega_y^2 t^4 - \frac{1}{2} gt^2;$$

Aber wir sehen, dass der Korrekturterm von der Größenordnung der Südablenkung ist, d.h. 1 Mikrometer bei 83m Fallhöhe und verzichten auf diese Korrektur

Corioliskraft,
Freier Fall in Mainz, Lösung im nichtrotierenden System

β = 50° ; α = 40°
x,y,z Koordinatensystem im Zentrum der Erde; z in Richtung Dom, x nach Osten
y nach Norden;
R= Vektor Erdmittelpunkt-Dom

Die gelb schraffierte x,z Ebene ist tangential zum 50° Breitengrad,
Aber nur Mainz liegt in der Ebene,
Alle anderen Punkte auf dem Breitengrad haben positive y-Komponenten!



Fallender Körper um t=0 startet bei

$$\mathbf{r}_{start} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R+h \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{v}_{start} = \begin{pmatrix} \omega(R+h)_\perp \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Schwerkraft wirkt immer Richtung Erdmittelpunkt, der Körper bewegt sich daher nur in der x,z Ebene!
Wenn man g parallel z annimmt (siehe aber Folie2).

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix}$$

Corioliskraft,
Freier Fall in Mainz, Lösung im nichtrotierenden System

Mit $t_{Fall} \approx \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 83}{9.81}}\,\mathrm{s} = 4.114\mathrm{s};$

und konstanter Geschwindigkeitsdifferenz zwischen Fußpunkt und Spitze des Domes

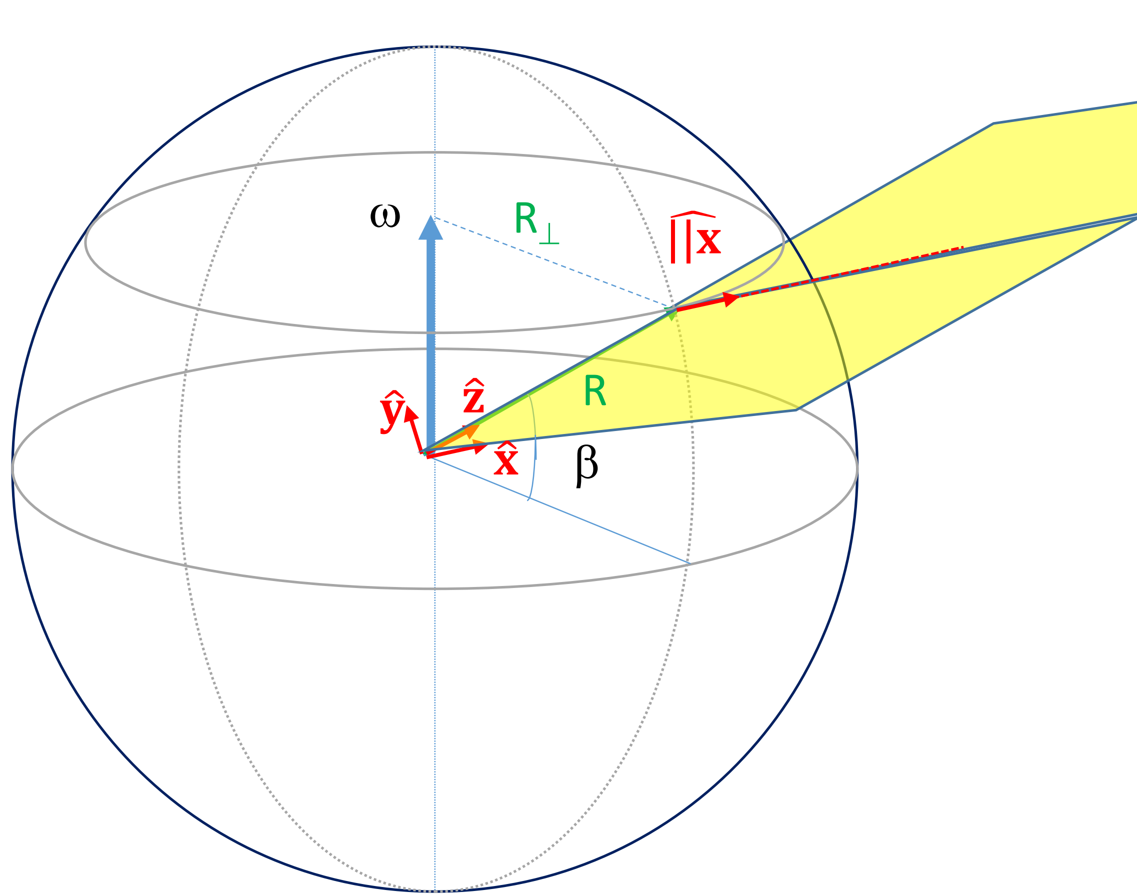
$$\Delta\, v_x = \omega(R+h)_\perp - \omega R_\perp$$
$$= \omega\, h_\perp = \omega h \cos\beta$$

Resultiert während der Fallzeit in Streckendifferenz

$$\Delta x_0 = \Delta v_x t_{Fall} = \omega h \cos\beta\; t_{Fall} = 1{,}6\mathrm{cm}$$

Von erster Herleitung abweichendes Ergebnis!

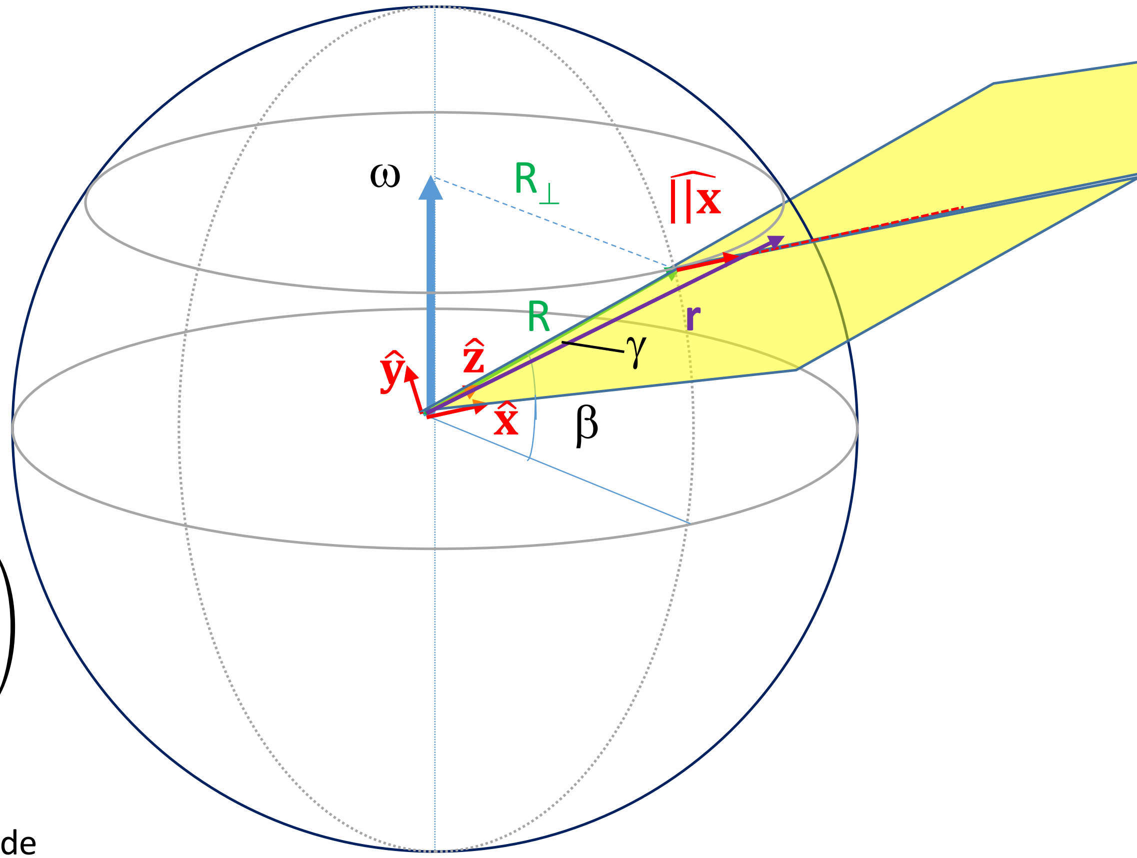
Verbessere Herleitung nächste Seite



Corioliskraft,
Freier Fall in Mainz, Lösung im nichtrotierenden System

β = 50° ; α = 40°
x,y,z Koordinatensystem im Zentrum der Erde; z in Richtung Dom, x nach Osten
y nach Norden;
R= Vektor Erdmittelpunkt-Dom

Die gelb schraffierte x,z Ebene ist tangential zum 50° Breitengrad,
Aber nur Mainz liegt in der Ebene,
Alle anderen Punkte auf dem Breitengrad haben positive y-Komponenten!



Fallender Körper um t=0 startet bei

$$\mathbf{r}_{start} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R+h \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{v}_{start} = \begin{pmatrix} \omega(R+h)_\perp \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

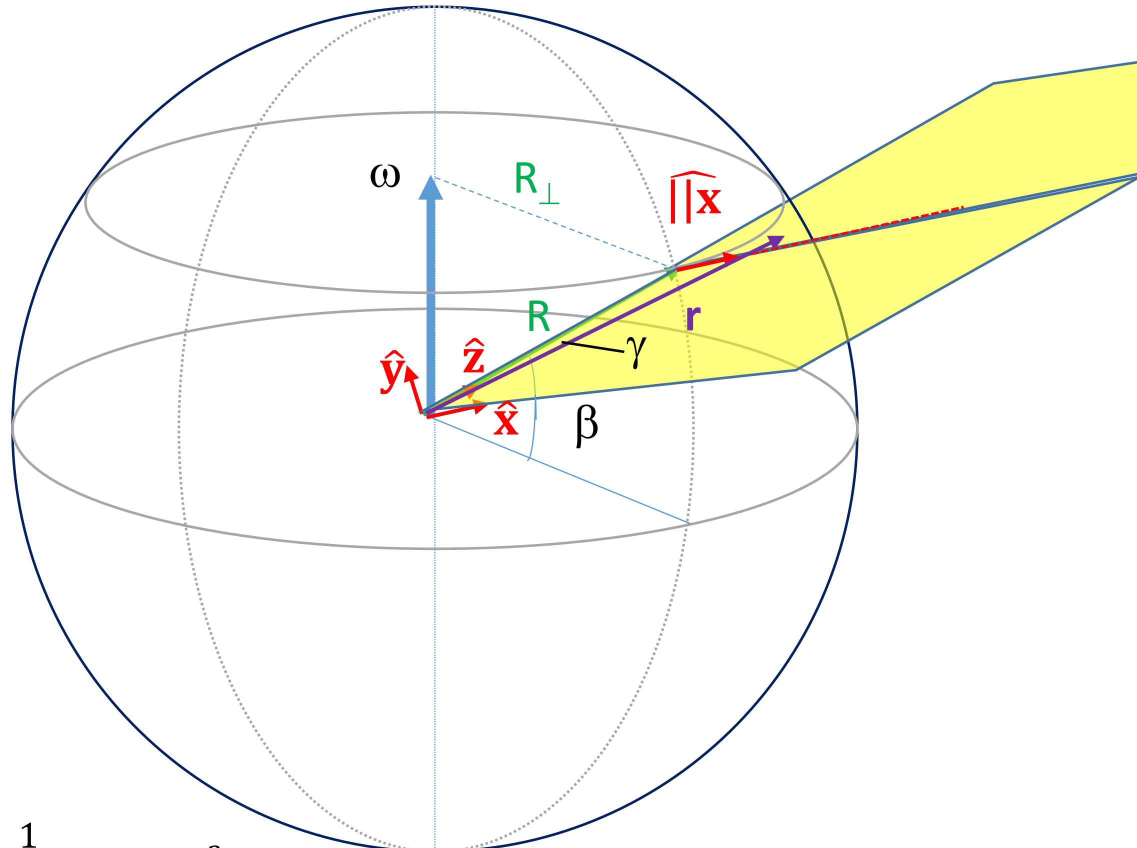
Die Schwerkraft wirkt immer Richtung Erdmittelpunkt,
der Körper bewegt sich daher nur in der x,z Ebene!
g ist nicht exakt parallel z sondern besitzt eine bremsende Komponente in negativer x- Richtung! Im nichtrotierendem System wächst x-Komponente viel schneller als im rotierendem.
Mit γ = Winkel zwischen $\mathbf{r}_{start}$ und $\mathbf{r}(t)$
Da $\gamma \ll 1$ kann dies in der z Komponente vernachlässigt werden, aber nicht in x-Richtung, Taylorentwicklung:

$$\mathbf{g} = -g\begin{pmatrix} \sin\gamma \\ 0 \\ \cos\gamma \end{pmatrix} \approx -g\begin{pmatrix} \sin\gamma \\ 0 \\ 1-\frac{\gamma^2}{2} \end{pmatrix} \approx -g\begin{pmatrix} \sin\gamma \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Corioliskraft,
Freier Fall in Mainz, Lösung im nichtrotierenden System

$$\mathbf{g} = -g\begin{pmatrix} \sin\gamma \\ 0 \\ \cos\gamma \end{pmatrix} \approx -g\begin{pmatrix} \sin\gamma \\ 0 \\ 1-\frac{\gamma^2}{2} \end{pmatrix} \approx -g\begin{pmatrix} \sin\gamma \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\sin\gamma = \frac{x}{\sqrt{x^2+(R+z)^2}}$$



d.h. es gibt eine zeitabhängige Beschleunigung in x – Richtung zusätzlich zu dem konstanten Term $\mathrm{v}_0 = \omega(R+h)_\perp$

$$a_{\mathrm{corr}}\big(x(t)\big) = -g\frac{x}{\sqrt{x^2+(R+z)^2}} \approx -g\frac{x}{R}$$

$$a_{\mathrm{corr}}\big(x(t)\big) = -g\frac{x}{R} \approx -g\frac{v_0 t}{R} = -g\frac{\omega(R+h)_\perp t}{R}$$

$$a_{\mathrm{corr}}\big(x(t)\big) = -g\omega t\frac{(R+h)_\perp}{R} \approx -g\omega\cos\beta\, t$$

$$v_{\mathrm{corr}}(t) = \int_0^t a_{corr}(t')dt' = -\int_0^t g\omega\cos\beta\, t'dt' = -\frac{1}{2}g\omega\cos\beta\, t^2$$

$$s_{\mathrm{corr}}(t) = \int_0^t v_{corr}(t')dt' = -\int_0^t \frac{1}{2}g\omega\cos\beta\, t'^2dt' = -\frac{1}{6}g\omega\cos\beta\, t^3$$

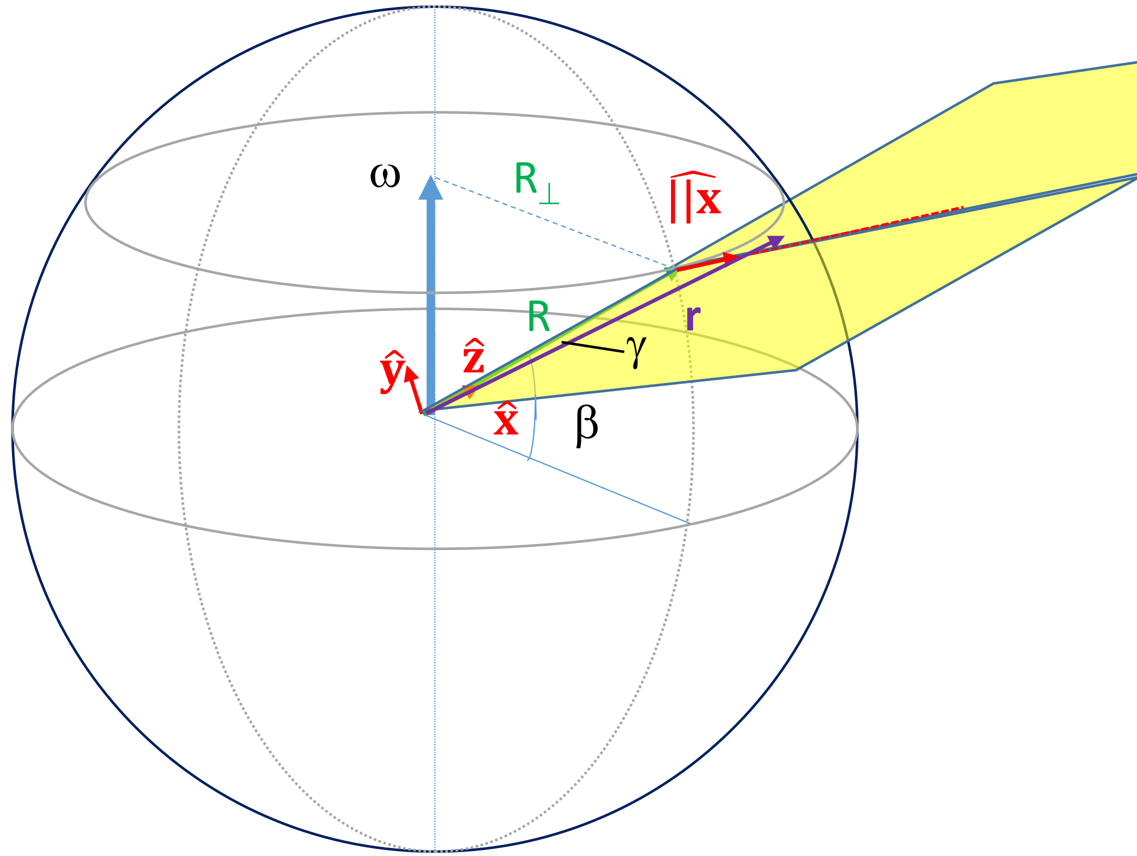
Corioliskraft,
Freier Fall in Mainz, Lösung im nichtrotierenden System

Mit dieser Korrektur ist die Gesamtablenkung

$$\Delta x = \Delta x_1 + s_{corr}(t_{Fall})$$
$$= \omega h \cos\beta \, t_{Fall} - \frac{1}{6} g\omega \cos\beta \, t_{Fall}^3$$

Mit $t_{Fall} \approx \sqrt{\frac{2h}{g}}$;

$$\Delta x = \omega \cos\beta \left(h\sqrt{\frac{2h}{g}} - \frac{g}{6}\sqrt{\frac{2^3 h^3}{g^3}} \right)$$
$$= g\omega_y \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2^3 h^3}{g^3}} - \frac{1}{6}\sqrt{\frac{2^3 h^3}{g^3}} \right)$$
$$= \frac{2}{3} g\omega_y \left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{3}{2}} = 1{,}06\text{cm}$$



Wie in dem anderen Lösungsweg, ebenso die sehr kleine Südablenkung!

Effekte in ω^2 sind jeweils vernachlässigt.