Übungen zum Computerpraktikum Stochastik

Prof. Dr. A. Klenke **WS 2017/2018** **Blatt 4**

1. **(einzusenden)** Sei $\mathbb{X} \in \{0, \ldots, 99\}$ diejenige Zahl, die sich aus den letzten beiden Ziffern Ihrer Matrikelnummer ergibt. Die Aufgabe nimmt im weiteren exemplarisch $\mathbb{X} = 13$ an. Laden Sie aus dem Internet den Datensatz `zufzahlen13.txt` durch

   ```
   x <- read.table("https://www.staff.uni-mainz.de/klenke/
                      vorlesungen/prakt_ws17/uebungen/zv2/zufzahlen13.txt")
   ```

   Merke: Dies ist eine andere Adresse (und sind andere Zahlen) als auf Blatt 1. Man finde mit Hilfe von QQ-Plots heraus, welchem Verteilungsgesetz die Zufallszahlen genügen. In Frage kommen: Normalverteilungen $\mathcal{N}_{\mu,\sigma^2}$ mit $\mu \in \{-5, \ldots, 5\}$ und $\sigma \in \{1, \ldots, 10\}$, sowie Cauchy-Verteilungen mit Skalenparameter scale$\in \{0.2, 0.4, \ldots, 2.0\}$.

   Einzusenden sind:

   - Name, Matrikelnummer; Im Betreff: Blatt und Aufgabennummer
   - Die korrekte Verteilung mit Parameter(n).
   - Der QQ-Plot der korrekten Verteilung als PDF Datei.

2. Seien $X_1, X_2, \ldots$ Zufallszahlen, die nach dem selben Verteilungsgesetz unabhängig voneinander erzeugt wurden. Für eine große Klasse von Verteilungsgesetzen kann man Zahlen $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma^2 > 0$ so wählen, dass für große $n \in \mathbb{N}$ die Zahl

   $$S_n^* = \frac{X_1 + \ldots + X_n - \mu\, n}{\sqrt{n\,\sigma^2}}$$

   ungefähr standardnormalverteilt ($\mathcal{N}_{0,1}$) ist (Zentraler Grenzwertsatz). Man prüfe dies durch QQ-Plots hinreichend großer Samples für $n = 1000$ (und finde ggf. die Zahlen μ, σ^2) für

   - Die Exponentialverteilung $\exp_1$.
   - Die Gleichverteilung $\mathcal{U}_{[0,1]}$ auf $[0, 1]$.
   - Die Gammaverteilung mit Formparameter (shape) 2.
   - Die Cauchy-Verteilung mit Skalenparameter 1.

3. Die beiden wichtigsten Methoden, um aus uniform auf $[0, 1]$ verteilten Zufallszahlen normalverteilte Zufallszahlen herzustellen sind die Polar-Marsaglia und die Box-Muller Methode.

   Box-Muller. Seien U, V unabhängig und $\mathcal{U}_{[0,1]}$ verteilt. Dann sind

   $$X = \sqrt{-2\log(U)}\,\cos(2\pi V) \quad \text{und} \quad Y = \sqrt{-2\log(U)}\,\sin(2\pi V)$$

   unabhängig und normalverteilt.

   Polar-Marsaglia. Erzeuge einen Zufallsvektor (U, V), der gleichmäßig auf dem Einheitskreis $B = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq 1\}$ verteilt ist (wie geht das?). Sei $R = U^2 + V^2$ und

   $$X = U\,\sqrt{-2\log(R)/R} \quad \text{und} \quad Y = V\,\sqrt{-2\log(R)/R}.$$

   Dann sind X und Y unabhängig und normalverteilt.

   Schreibe Funktionen box.muller(n) und polar.marsaglia(n), die n unabhängige normalverteilte Zufallszahlen als Ausgabe haben. Prüfe mit Hilfe eines QQ-Plots, ob die Zahlen tatsächlich normalverteilt sind. Prüfe mit Hilfe von system.time, welches Verfahren schneller ist.

Abgaben bis Montag, 13.11.2017, 14:00 Uhr an
stoch-praktikum@mathematik.uni-mainz.de