Übungen zum Computerpraktikum Stochastik

Prof. Dr. A. Klenke **WS 2017/2018** **Blatt 5**

1. Sei $p \in [0,1]$. Man simuliere die Markovkette X auf $E = \{0,1,2,\dots\}$ mit Übergangsmatrix

$$A(x,y) = \begin{cases} p, & \text{falls } \; y = x+1 \\ 1-p, & \text{falls } \; y = x-1 \quad \text{oder} \quad x = y = 0 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

   (a) Für $p \in [0, 1/2)$ prüfe man die Behauptung, dass die Verteilung der Kette gegen die geometrische Verteilung $\pi = \gamma_{(1-2p)/(1-p)}$ konvergiert. (Man simuliere eine große Anzahl n von Schritten, erstelle ein hinreichend großes Sample und vergleiche die so gewonnene empirische Verteilung in einem Balkendiagramm mit π.)

   (b) Für verschiedene Werte $p \in [1/2, 1]$ bestimme man für die in $X_0 = 5$ gestartete Kette die Wahrscheinlichkeit $w(p)$, dass die Kette *jemals* die Null trifft, indem man so viele Schritte simuliert, bis man hinreichend sicher ist, dass die Kette die Null nicht mehr trifft (z.B. indem man die Kette simuliert bis sie die 100 trifft). Man trage diese Wahrscheinlichkeiten gegen p in ein Diagramm ein und prüfe, ob die Formel $w(p) = ((1-p)/p)^5$ stimmt.

2. **(einzusenden)** Simulation einer Markovkette. Betrachte eine Markovkette auf $E = \{0,\dots,6\}$ mit Übergangsmatrix

$$A(x,y) = \begin{cases} 1/2, & \text{falls } \; x = 1,\dots,6 \; \text{ und } \; y = x+1 \pmod 7, \\ 1/2, & \text{falls } \; x = 0,\dots,6 \; \text{ und } \; y = x-1 \pmod 7, \\ 1/2, & \text{falls } \; x = 0 \text{ und } y = 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

   (a) Erfüllt A die Bedingungen des Satzes aus der Vorlesung über Existenz und Eindeutigkeit des Gleichgewichtszustands, bzw. des Satzes über das Langzeitverhalten?

   (b) Man bestimme die invariante Verteilung π.

   (c) Man simuliere die Markovkette mit diesen Übergangswahrscheinlichkeiten und erstelle ein Histogramm, das die Verteilung nach 100 Schritten mit der invarianten Verteilung vergleicht, und beurteile das Ergebnis (welche Samplegröße ist vernünftig?).

   (d) Man erstelle eine Grafik, die den Satz über das Langzeitverhalten illustriert.

   (e) Sei N die Samplegröße und μ_n die empirische Verteilung nach n Schritten:

$$\mu_n(\{x\}) = \frac{1}{N} \#\big\{i = 1,\dots,N : \text{für Sample } i \text{ ist die Kette ist nach } n \text{ Schritten in } x\big\}.$$

   Sei $\Delta_n := \sum_{x \in E} |\mu_n(\{x\}) - \pi(\{x\})|$. Man trage $\log(\Delta_n)$ gegen n auf und verifiziere die approximative Formel $\Delta_n = |\lambda_2|^n$, wobei λ_2 der betragsmäßig zweitgrößte Eigenwert von A ist. (N ist hinreichend groß zu wählen, und etwa $n = 20, 30, 40, 50, 60, 70, 100$. Eventuell können größere Werte von n ausprobiert werden.)

   Einzusenden sind:

   - Name, Matrikelnummer; Im Betreff: Blatt und Aufgabennummer
   - (a), (b): kurzer Text.
   - (c), (d): Programme und je eine Grafik, (c) kurzer Text.
   - (e) nicht einzusenden.

Abgaben bis Montag, 20.11.2017, 14:00 Uhr an
stoch-praktikum@mathematik.uni-mainz.de