

1. (**einzusenden**) Ein Versicherungsunternehmen verfügt über ein Startkapital von 1 000 000 Euro. Nach Auskunft der Entwicklungsabteilung des Unternehmens soll ein neuer Vertrag jährlich das Unternehmen zu einer zufälligen Schadenszahlung (in Euro) von

$$X_i = \sum_{k=1}^{K_i} R_{i,k} + \sum_{k=1}^{G_i} S_{i,k}$$

verpflichten (am **Ende** des Jahres i). Dabei sollen K_i , G_i , $R_{i,k}$ und $S_{i,k}$ unabhängige Zufallsvariablen sein. Die *kleinen* Schäden $R_{i,k}$ soll $\Gamma_{0.1,1000}$ verteilt sein (siehe Skript Def. 7.14), ihre Anzahl K_i soll Poisson-verteilt sein mit Parameter 10. Die *großen* Schäden $S_{i,k}$ sollen $\Gamma_{0.02,1000}$ -verteilt sein, ihre Anzahl G_i soll Poisson-verteilt sein mit Parameter 1/2. Wir nehmen an, dass alle Zufallszahlen unabhängig sind.

- (a) Wie hoch muss die jährliche Prämie a für den Vertrag sein (der Einfachheit halber zahlbar am **Ende** jedes Jahres), damit die Wahrscheinlichkeit p_R für den Ruin des Unternehmens innerhalb der nächsten 100 Jahre kleiner als 1% ist?

Anleitung: Für jeden festen Schadensverlauf (d.h. für feste Realisierung der X_1, \dots, X_{100}) bestimme man die Prämie A , die den Ruin innerhalb der nächsten 100 Jahre verhindert. Dann erzeuge man eine große Stichprobe von Schadensverläufen und ermittle denjenigen Wert a , sodass $A \geq a$ in 1% aller Fälle gilt (z.B. mit `quantile()`). Die Stichprobengröße N ist so zu wählen, dass der Fehler für die Ruinwahrscheinlichkeit ($\approx \sqrt{0.01/N}$) höchstens 0.4% beträgt.

- (b) Wir nehmen an, dass das Versicherungsunternehmen das aktuelle Kapital am Kapitalmarkt in Aktien anlegen kann. Dabei soll nur eine Aktie zur Verfügung stehen, deren Kurs sich gemäß der folgenden stochastischen Differentialgleichung verhält:

$$dX_t = \sigma X_t dW_t + r X_t dt.$$

Die Zeit t wird hier in Jahren gemessen. Wir nehmen als jährliche Prämie $a = 125\,000$ Euro an. Die Zinsrate sei $r = 0.06$, die Volatilität $\sigma = 0.2$.

Das Versicherungsunternehmen kauft anfangs für den Anteil q des Startkapitals Aktien. Nach Jahresfrist wird Kasse gemacht: Die Schadensfälle werden bezahlt, die Aktien liquidiert und die Prämien eingezogen. Von dem neuen Kapital (falls positiv) wird wiederum der Anteil q in Aktien angelegt. Am Ende des zweiten Jahres wird wiederum Kasse gemacht und so weiter. Wie groß ist q zu wählen, damit die Ruinwahrscheinlichkeit möglichst klein ist?

Anleitung: Der anfängliche Kurs der Aktie spielt keine Rolle, kann also als $X_0 := 1$ gesetzt werden. Man simuliere den Kursverlauf der Aktie X_t , $t \in [0, 100]$ mit einem Euler-Schema der Schrittweite $\Delta = 0.05$. Für festen Kursverlauf und festen Schadensverlauf bestimme man für $q \in \{0, 0.1, \dots, 0.9, 1.0\}$ ob ein Ruin eingetreten ist und ermittle mit einer großen Stichprobe so die Ruinwahrscheinlichkeiten $p_R(q)$ und speziell das q , das $p_R(q)$ minimiert.

Einzusenden sind:

- Name, Matrikelnummer; Im Betreff: Blatt und Aufgabennummer
- Die Programme und Ergebnisse (als Seed für den Zufallszahlengenerator ist Ihre Matrikelnummer zu verwenden).