Übungen zum Computerpraktikum Stochastik

Prof. Dr. A. Klenke **WS 2017/2018** **Blatt 8**

1. Sei $I(c) := \int_0^1 \sin(x+c)\,dx$, $c \in [0,\pi]$. Bestimme für $c = k\pi/20$, $k = 0,\dots,20$ mit unabhängigen Monte Carlo Simulationen Schätzwerte für $I(c)$ und trage sie in ein Diagramm ein. Für welchen Wert von c ist $I(c)$ maximal?

   Man mache den selben Versuch mit gekoppelter Monte Carlo Simulation, d.h., man verwende für jedes c die *selben* Zufallszahlen.

2. **(einzusenden)** Man bestimme mit Hilfe einer Monte Carlo Simulation den Wert von

$$I := \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\,dz\,dy\,dx$$

   bis auf vier Nachkommastellen genau.

   Hinweis: Man führe zunächst eine Simulation bei kleiner Stichprobengröße zur Ermittlung der Varianz durch, bestimme so die notwendige Stichprobengröße und führe dann die Hauptsimulation durch. Einzusenden sind:

   - Name, Matrikelnummer; Im Betreff: Blatt und Aufgabennummer
   - Die Programme und Ergebnisse (als Seed für den Zufallszahlengenerator ist Ihre Matrikelnummer zu verwenden).

3. Sei X eine Zufallsvariable mit endlichem zweiten Moment und

$$f(c) := c^2 \mathbf{P}\left[|X - \mathbf{E}[X]| > c\sqrt{\mathrm{Var}[X]}\right] \qquad \text{für} \;\; c > 0.$$

   (a) Bestimme mit einer Monte Carlo Simulation $f(c)$, $c \in \{0.1, 0.2, \dots, 5.0\}$ für X

      i. geometrisch verteilt mit Parameter p,

      ii. uniform verteilt auf $[0,1]$,

      iii. uniform verteilt auf $[-5,5]$,

      iv. standardnormalverteilt (also $\mathcal{N}_{0,1}$).

   (b) Seien $X_1,\dots,X_n$ unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen nach der selben Verteilung. Sei

$$f_n(c) = c^2 \mathbf{P}\left[|X - \mathbf{E}[X]| > c\sqrt{\mathrm{Var}[X]/n}\right] \qquad \text{für} \;\; c > 0.$$

   Bestimme mit Hilfe einer Monte Carlo Simulation $f_n(1)$, $f_n(2)$, $f_n(3)$ für $n = 100$, $n = 500$, $n = 1000$ für die Verteilungen aus dem ersten Teil der Aufgabe. Vergleichen Sie die Zahlenwerte mit $\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-x^2/2}\,dx$.

Abgaben bis Montag, 11.12.2017, 14:00 Uhr an
stoch-praktikum@mathematik.uni-mainz.de