Seien $S_1, S_2, \ldots$ u.i.v. exponentialverteilte Zufallsvariablen mit Parameter $\lambda > 0$ und $T_n := S_1 + \ldots + S_n$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Man simuliere den Pfad eines Poisson-Prozesses $N = (N_t)_{t \geq 0}$ mit Parameter λ durch

$$N_t \;:=\; \sum_{n \geq 1} \mathbf{1}_{[0,t]}(T_n), \quad t \geq 0,$$

über ein Zeitintervall $[0, T]$, mit verschiedenen Werten für $\lambda > 0$ und $0 < T < \infty$.

a) Mit $T = 10$ erstelle man Grafiken, die für jeden der Parameterwerte

$$\lambda \;\in\; \{0.1,\, 0.5,\, 1.0,\, 5.0\} \tag{1}$$

fünf simulierte Pfade $t \to N_t$ über das Zeitintervall $[0, 10]$ zeigen.

b) Für $T = 500$ simuliere man für jeden der Parameterwerte (1) einen Pfad des Poisson-Prozesses mit Parameter λ über $[0, T]$. Man zeichne jeweils

i) den Poisson-Pfad $t \;\mapsto\; N_t$ zusammen mit der Geraden $t \;\mapsto\; \lambda t$;

ii) den Pfad von $t \;\mapsto\; \frac{1}{t} N_t$;

iii) den Pfad von $t \;\mapsto\; (N_t - \lambda\, t)$ über $[0, T]$ mit markierten Niveaulinien $\pm 3\sqrt{\lambda T}$.

Was schließt man aus den Bildern?

c) Für $T = 10$ gewinne man aus 1000 Läufen der Simulation mit $\lambda = 0.5$ einen Datensatz

$$x_1,\; x_2,\; \ldots,\; x_{1000} \tag{2}$$

von 1000 (simulierten) Realisierungen der Zufallsvariable N_T.

i) Man vergleiche Poisson-Verteilungen Poi_μ, $0 < \mu < \infty$, mit einem Histogramm zu dem Datensatz (2), und suche Parameterwerte $\widetilde{\mu}$, welche in einem geeigneten Sinn eine gute Approximation liefern.

ii) Man vergleiche die Schar aller Erzeugendenfunktionen zu Poissonverteilungen Poi_μ, $0 < \mu < \infty$, mit der *empirischen Erzeugendenfunktion* zum Datensatz (2)

$$[0,1] \;\ni\; s \;\mapsto\; \frac{1}{1000} \sum_{n=1}^{1000} s^{x_n} \;\;\in\; [0,1] \tag{3}$$

und suche Werte $\widetilde{\mu}$, welche zu einer guten Approximation — in $L^2\,([0,1], \mathrm{d}x)$ — an (3) führen.

Zum Vergleich versuche man die Approximation nicht mit Poisson-Verteilungen sondern mit geometrisch verteilten Zufallsvariablen. Wie klein lässt sich hier der L^2-Abstand machen?

iii) Man vergleiche die in i) und ii) gefundenen Schätzwerte mit dem empirischen Mittelwert des Datensatzes (2).

d) Man simuliere einen Poissonprozess mit Parameter $\lambda = 1$ über das Zeitintervall $[0, 10]$, indem man zunächst eine Poi_{10}-verteilte Zufallszahl N erzeugt und dann N viele Punkte unabhängig und gleichverteilt auf das Zeitintervall $[0, 10]$ verteilt. Man prüfe für hinreichend große Stichprobe mit Hilfe eines QQ-Plots, dass die Wartezeit auf den ersten Punkt tatsächlich exponentialverteilt mit Parameter 1 ist.

Abgaben bis Montag, 08.01.2018, 14:00 Uhr an
stoch-praktikum@mathematik.uni-mainz.de