Juniorprof. Dr. Ariyan Javanpeykar — L. Biroth

1. Übung zur Vorlesung

„Elementarmathematik“

im Sommersemester 19

Aufgabe 1: (2+2+2+2 Punkte)

Zeigen Sie mit Induktion:

(a) Für alle $0 \leq a, b \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $a^n + b^n \leq (a+b)^n$

(b) $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$ und alle $n \in \mathbb{N}$

Die Fibonacci-Zahlen sind defininiert durch

$$F_1 = F_2 = 1, \quad F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

Zeigen Sie:

(c) $1 + \sum_{k=1}^{n} F_k = F_{n+2}$ und alle $n \in \mathbb{N}$

(d) $\sum_{k=1}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1}$ und alle $n \in \mathbb{N}$

Aufgabe 2: (2+2+3 Punkte)

(a) Zeichnen und berechnen Sie die ersten 11 Zeilen des Pascalschen Dreiecks.

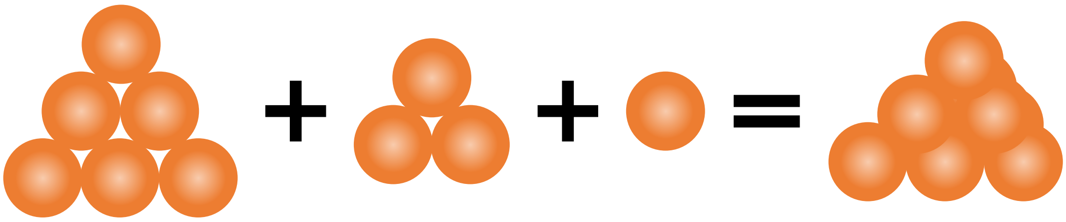
(b) Färben Sie in einer Zeichnung alle durch 3 teilbaren Einträge ein und in einer anderen alle durch 5 teilbaren. Sehen Sie ein Muster?

(c) Auf wie vielen Wegen lässt sich das Wort MATHERÄTSEL in der Abbildung lesen? Beginnen Sie beim Ablesen mit dem oberen Buchstaben M und gehen Sie dann immer schräg nach unten links oder unten rechts, bis Sie zu dem ganz unten stehenden Buchstaben L gelangen.
Begründen Sie Ihre Antwort.

```
          M
        A   A
      T   T   T
    H   H   H   H
  E   E   E   E   E
R   R   R   R   R   R
  Ä   Ä   Ä   Ä   Ä
    T   T   T   T
      S   S   S
        E   E
          L
```

Aufgabe 3: (1+1+1+3 Punkte)

Ein Obsthändler stapelt seine Orangen nach folgendem Mustern zu Tetraedern:



Die Anzahl Orangen, die er für einen Tetradeder mit Kantenlänge n benötigt, bezeichnen wir als n-te Tetraederzahl t_n.

(a) Berechnen Sie die ersten fünf Tetraederzahlen.

(b) Wo finden Sie diese Zahlen im Pascalschen Dreieck?

(c) Wie könnte eine explizite Formel für die $n$te Tetraederzahl lauten?

(d) Beweisen Sie diese Formel (z.B. mit Induktion).

Aufgabe 4: (3 Punkte)

Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(x-y) \cdot (x^n + x^{n-1}y + x^{n-2}y^2 + \cdots + xy^{n-1} + y^n) = x^{n+1} - y^{n+1}.$$