Juniorprof. Dr. Ariyan Javanpeykar L. Biroth

10. Übung zur Vorlesung

„Elementarmathematik“

im Sommersemester 19

Aufgabe 1: (3+2+3+2 Punkte)

Verwenden Sie Ihre Schulkenntnisse über die Kurvendiskussion, um diese Aufgabe zu lösen. Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x^3 + ax + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) Unter welchen Bedingungen besitzt f lokale Extrema? Bestimmen Sie die Extremstellen, deren Funktionswerte und die Art der Extrema.
Hinweis: Hat f an der Stelle x ein lokales Extremum, so gilt $f'(x) = 0$. Ist zusätzlich $f''(x) < 0$, so handelt es sich um ein lokales Maximum, ist $f''(x) > 0$, so handelt es sich um ein lokales Minimum. Für $f''(x) = 0$ kann man keine Aussage treffen.

(b) Welche zusätzliche Bedingung muss erfüllt sein, damit das lokale Maximum positiv ist? Unter welcher Bedingung ist das lokale Minimum negativ?

(c) Folgern Sie daraus, dass f genau dann drei verschiedene reelle Nullstellen besitzt, wenn $\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3 < 0$.

(d) Was passiert in diesem Fall, wenn man die Nullstellen von f mit der Cardanischen Formel berechnen möchte?
Hinweis: Die Cardanische Formel besagt: $z = u - \frac{p}{3u}$ mit $u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$ ist eine Lösung der Gleichung $z^3 + pz + q = 0$.

Aufgabe 2: (1+1+1+2+1+2 Punkte)

Berechnen Sie mit Hilfe der aus der Vorlesung bekannten Ableitungen und Rechenregeln die Ableitungen der folgenden Funktionen

(a) $f(x) = \ln(\cos(x))$

(b) $f(\varphi) = \sin(\varphi)\cos(\varphi)$

(c) $f(x) = x^x$

(d) $f(x) = x^{\cos(x)}$

(e) $f(x) = e^{x^2}$

(f) $g(t) = \frac{6t^4+2t^2-7t}{2t^3}$

Aufgabe 3: (2+2+2+2+1 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Integrale

(a) $\int_e^x \ln(t)dt$

(b) $\int_0^\pi x\sin(x)dx$

(c) $\int_0^{\pi/2} \sin(x)\cos(x)dx$

(d) $\int_0^2 \frac{4x}{\sqrt{1+2x^2}}dx$

(e) $\int_x^y \tan(t)dt$