Juniorprof. Dr. Ariyan Javanpeykar L. Biroth

11. Übung zur Vorlesung

„Elementarmathematik“

im Sommersemester 19

Aufgabe 1: (3+3 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die ersten 5 Koeffizienten der Potenzreihe von $\sin^2(x)$ mit Hilfe der Taylorformel.

(b) Bestimmen Sie die ersten 5 Koeffizienten der Potenzreihe von $\sin^2(x)$ durch Quadrieren der Potenzreihe

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

Aufgabe 2: (4+2 Punkte)

(a) Leiten Sie die geometrische Reihe ab, um zu zeigen dass

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2} \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=0}^{\infty}(n^2+3n+2)x^n = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

(b) Konstruieren Sie hieraus eine Funktion mit der Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n.$$

Aufgabe 3: (4+2 Punkte)

Die Fibonacci-Zahlen f_n sind definiert durch $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ und $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$. Sei nun

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n x^n.$$

(a) Zeigen Sie durch Koeffizientenvergleich:

$$F(x) = xF(x) + x^2F(x) + x$$

(b) Folgern Sie daraus:

$$F(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$$

Aufgabe 4: (3+3 Punkte)

Die Taylorreihe des Logarithmus lautet

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \pm \dots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \qquad \text{für } -1 < x \leq 1.$$

(a) Zeigen Sie

$$\ln(2) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n} \qquad \text{und} \qquad \ln(2) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}$$

(b) Berechnen Sie jeweils die vierte Partialsumme. Welche Reihe liefert die bessere Näherung?