2. Übung zur Vorlesung

„Elementarmathematik“

im Sommersemester 19

Verwenden Sie die Aussagen aus Aufgabe 1 sowie die Aussage

$$a \equiv b \mod n \quad \Rightarrow \quad a^m \equiv b^m \mod n \text{ für alle } m \in \mathbb{N}_0$$

aus der Vorlesung in den weiteren Aufgaben, gleichgültig ob Sie diese erfolgreich bearbeitet haben oder nicht.

Aufgabe 1: (3+3 Punkte)

Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $a \equiv b \mod n$ und $c \equiv d \mod n$. Zeigen Sie die Kongruenzen:

(a) $a + c \equiv b + d \mod n$.

(b) $a \cdot c \equiv b \cdot d \mod n$.

Hinweis: Benutzen Sie die Definition

$$a \equiv b \mod n \quad :\Leftrightarrow \quad \text{Es existiert ein } k \in \mathbb{Z} \text{ mit } a = b + kn.$$

Aufgabe 2: (3+2+2+2 Punkte)

(a) Angenommen wir haben 13:37 Uhr. Wie viel Uhr ist es in 100000 Minuten?

(b) Berechnen Sie:

i. $11^{100} \mod 5$

ii. $5^{100} \mod 3$

iii. $3^{102} \mod 5$

Aufgabe 3: (3 Punkte)

Zeigen Sie: Teilt man eine Quadratzahl durch 7, so bleibt niemals der Rest 3, 5 oder 6.
Hinweis: Betrachten Sie alle Fälle modulo 7.

Aufgabe 4: (2+2 Punkte)

Wir suchen eine Regel für die Teilbarkeit durch 11.

(a) Zeigen Sie: $\sum_{k=0}^{n} 10^k z_k \equiv \sum_{k=0}^{n} (-1)^k z_k \mod 11$.

(b) Zeigen Sie: Die Zahl mit der Dezimaldarstellung $z_n \cdots z_1 z_0$ ist genau dann durch 11 teilbar, wenn ihre *Querdifferenz* $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k z_k$ durch 11 teilbar ist.