

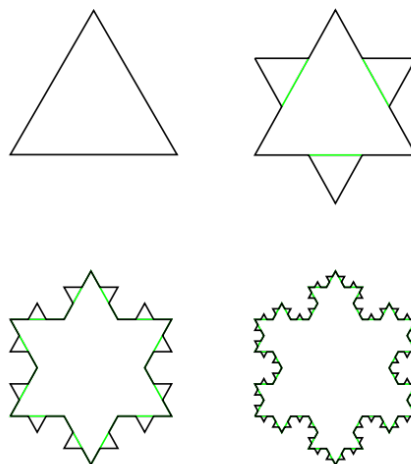
4. Übung zur Vorlesung
„Elementarmathematik“
 im Sommersemester 19

Aufgabe 1: (2+2+2+2+2 Punkte)

- (a) Bestimmen Sie den Grenzwert: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 7n}{2n^3 + 1}$
- (b) Bestimmen Sie den Grenzwert: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot 2^n + 4}{2^{n+1}}$
- (c) Zeigen Sie mit Hilfe der ϵ - N -Definition aus der Vorlesung: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$
- (d) Bestimmen Sie den Grenzwert: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
 Hinweis: Verwenden Sie Teil (c) sowie die dritte binomische Formel $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.
- (e) Bestimmen Sie den Wert der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + k}$
 Hinweis: Berechnen Sie $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.

Aufgabe 2: (3+3 Punkte)

In einem gleichseitigen Dreieck mit der Seitenlänge 1 cm wird in einem ersten Schritt jede Seite in drei gleich lange Teilstrecken zerlegt und über der mittleren Teilstrecke jeweils ein gleichseitiges Dreieck außen angehängt. Dieses Verfahren wird mehrmals wiederholt. Auf diese Weise entsteht eine Schneeflocke. Dabei wird in jedem Schritt an jeder Teilstrecke der Schneeflocke ein gleichseitiges Dreieck über dem mittleren Drittel dieser Teilstrecke angehängt.



©User: Wxs / Wikimedia Commons / CC-BY-SA-3.0

- (a)
- Leiten Sie eine Formel für den Umfang der Schneeflocke nach n Schritten her.
 - Konvergiert die Folge der Umfänge?
 - Ab welchem n ist der Umfang der Schneeflocke größer als der Erdumfang?

- (b)
- Leiten Sie eine Formel für den Flächeninhalt der Schneeflocke nach n Schritten her. Hinweis: Überlegen Sie sich dazu, wie viele Dreiecke von welcher Größe im n -ten Schritt hinzukommen.
 - Konvergiert die Folge der Flächeninhalte?
 - Wenn ja, berechnen Sie den Grenzwert der Folge für n gegen ∞ .

Aufgabe 3: (3 Punkte)

Zeigen Sie:

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{4} \cdot \sqrt[8]{8} \dots = 4.$$

Aufgabe 4: (3+1 Punkte)

Zwei Fahrradfahrer fahren zwischen Mainz und Frankfurt auf einer 40km langen geraden Strecke aufeinander zu. Jeder Fahrradfahrer fährt mit konstanter Geschwindigkeit von 20km/h. Eine Biene fliegt mit einer konstanten Geschwindigkeit von 30km/h vom Fahrradfahrer in Mainz in Richtung des zweiten Fahrradfahrers. Sobald sie diesen erreicht dreht sie um und fliegt dem ersten Fahrradfahrer entgegen. Dies wiederholt sich so lange, bis die beiden Fahrradfahrer zusammentreffen. Welche Strecke hat die Biene zurückgelegt?

- (a) Berechnen Sie den Zeitpunkt, an dem sich die Biene und der zweite Fahrradfahrer zum ersten mal treffen. Welche Strecke hat die Biene in dieser Zeit zurückgelegt? Wann trifft die Biene wieder beim ersten Radfahrer ein? Welcher Strecke entspricht das? Führen Sie Ihre Überlegung fort. Geben Sie die gesamte Flugstrecke der Biene mit Hilfe einer geometrischen Reihe an.
- (b) Lösen Sie die Aufgabe jetzt ohne Verwendung von Reihen.