5. Übung zur Vorlesung

„Elementarmathematik“

im Sommersemester 19

Aufgabe 1: (3 Punkte)

Finden und erklären Sie den Fehler im folgendem (offensichtlich falschen) Induktionsbeweis:

Behauptung: Alle Personen haben die gleiche Augenfarbe.

Beweis mit Induktion nach der Anzahl der Personen n.
Induktionsanfang (n=1): Für nur eine Person ist die Behauptung offensichtlich wahr..
Induktionsvoraussetzung: Wir dürfen annehmen, dass in jeder Gruppe von n Personen alle die gleiche Augenfarbe haben.
Induktionsschritt ($n \to n+1$): Betrachten wir nun eine Gruppe von $n+1$ Personen. Geht nun eine dieser Personen weg, erhalten wir eine Gruppe von n Personen, die aufgrund der Induktionsvoraussetzung alle dieselbe Augenfarbe haben. Kommt nun diese Person wieder zurück und geht eine andere weg, so hat auch diese n-elementige Teilmenge aller Personen dieselbe Augenfarbe. Die Person, die zuerst weggegangen war, hat also die gleiche Augenfarbe wie die restlichen Personen der Gruppe. Daher müssen alle $n+1$ Personen dieselbe Augenfarbe haben.

Aufgabe 2: (2+3 Punkte)

Zeigen Sie mit Induktion:

(a) Für alle $n \geq 4$ ist $n! > 2^n$.

(b) Man kann jeden ganzzahligen Betrag ≥ 8 mit Münzen der Werte 3 und 5 passend bezahlen, ohne Wechselgeld zu benötigen.
Oder formal:
Für alle $x \geq 8$ gibt es $m, n \in \mathbb{N}_0$, sodass $x = 3n + 5m$.
Hinweis: Versuchen Sie einen Induktionsschritt von $x \to x+3$ oder $x \to x+5$ und passen Sie den Induktionsanfang entsprechend an.

Aufgabe 3: (2+2+2+2 Punkte)

Welche der folgenden Zeichen ($\Leftarrow$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$) können Sie jeweils für $\square$ einsetzen um eine wahre Aussage zu erhalten, welche nicht? Begründen Sie Ihre Antwort:

(a) $x \equiv 0 \mod 4 \;\square\; x$ ist gerade

(b) x ist gerade $\square$ x^2 ist gerade

(c) $a^2 = b^2 \;\square\; a = b$

(d) $2|n \;\square\; 3|n$

Aufgabe 4: (2+2+2 Punkte)

Bestimmen Sie jeweils alle positiven ganzen Zahlen n, sodass

(a) $20 \equiv 10 \mod n$ und $25 \equiv 8 \mod n-1$.

(b) $n+2 \equiv 15 \mod 13$ und $30 \equiv 3 \mod n$.

(c) $25 \equiv 1 \mod n$ und $15 \equiv 3 \mod n-2$.

Aufgabe 5: (2 Punkte)

Zeigen Sie: Ist $a \equiv b \mod n$ und d ein Teiler von n, so ist auch $a \equiv b \mod d$.