Juniorprof. Dr. Ariyan Javanpeykar L. Biroth

6. Übung zur Vorlesung

„Elementarmathematik“

im Sommersemester 19

Aufgabe 1: (2+2 Punkte)

Zeigen Sie, dass die folgenden Folgen konvergieren, indem Sie die Monotonie und Beschränktheit der Folgen nachweisen:

(a) $a_n = \frac{\sqrt{5n}}{\sqrt{n+1}}$

(b) $b_n = \sqrt[n]{2}$

Aufgabe 2: (3+3 Punkte)

Für $s \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}_0$ ist der (verallgemeinerte) Binomialkoeffizient wie folgt definiert:

$$\binom{s}{k} := \frac{s(s-1)\cdots(s-(k-1))}{k!}$$

(a) Zeigen Sie

$$\binom{-1/2}{n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} (-1)^n \cdot \binom{2n-1}{n}.$$

(b) Berechnen Sie die Binomialkoeffizienten $\binom{1/2}{1}$, $\binom{1/2}{2}$, $\binom{1/2}{3}$ und $\binom{-1/2}{1}$, $\binom{-1/2}{2}$, $\binom{-1/2}{3}$.

Aufgabe 3: (6+2+2 Punkte)

In Abschnitt 3.6 des Vorlesungsskripts finden Sie zwei Verfahren um Näherungswerte für Wurzeln zu bestimmen. Lesen Sie diesen durch.
Das Theon-Verfahren lässt sich kurz wie folgt beschreiben: Ist $\frac{a}{b}$ eine Annäherung an $\sqrt{n}$, so ist $\frac{a+nb}{a+b}$ eine bessere.
Eine Kurzbeschreibung des Heron-Verfahrens lautet: Ist x eine Annäherung an $\sqrt{n}$, so ist $\frac{1}{2}\left(x + \frac{n}{x}\right)$ eine bessere.

(a) Berechnen Sie Näherungswerte für $\sqrt{2}$, indem Sie

- drei Schritte des Theon-Verfahrens mit Startwert $\frac{1}{1}$ durchführen.
- drei Schritte des Heron-Verfahrens mit Startwert 1 durchführen.
- die dritte Partialsumme der Binomialreihe $(1+x)^s = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{s}{k} x^k$ für $x = 1$ und $s = \frac{1}{2}$ berechnen.

Welche Näherung ist am besten, welche am schlechtesten?

(b) Zeigen Sie: $\sqrt{2} = \frac{7}{5}\sqrt{1 + \frac{1}{49}}$

(c) Berechnen Sie $\sqrt{2}$ erneut mit dieser Formel und der Binomialreihe für $x = \frac{1}{49}$. Erhalten Sie eine bessere Näherung?

Aufgabe 4: (2 Punkte)

Ist $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ eine rationale Zahl?
Hinweis: Mit einem ähnlichen Beweis wie für Irrationalität von $\sqrt{2}$ kann man zeigen, dass $\sqrt{n}$ irrational ist, sobald n keine Quadratzahl ist. Dies dürfen Sie hier verwenden ohne den Beweis nochmal auszuführen.