7. Übung zur Vorlesung

„Elementarmathematik“

im Sommersemester 19

Aufgabe 1: (6+1+1+1 Punkte)

(a) Geben Sie $z+w$, $z-w$, $z\cdot w$, $\bar{z}$ und $\frac{z}{w}$ für $z=1+2i$ und $w=3+4i$ jeweils in der Form $a+bi$ an und fertigen Sie eine Skizze an.

Berechnen Sie:

(b) $(1+\sqrt{3}i)^3$

(c) $\frac{1+i}{1-i}$

(d) $(1-2i)\cdot(3-4i)\cdot(5-6i)$

Aufgabe 2: (3 Punkte)

Sei $z=\frac{\sqrt{3}}{3}+i$. Skizzieren Sie $z^{-6}, z^{-5}, \ldots, z^{6}$ in der komplexen Zahlenebene.
Hinweis: Arbeiten Sie mit Betrag und Argument.

Aufgabe 3: (3 Punkte)

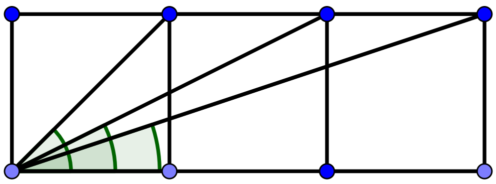
Finden Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung

$$z^2+2|z|=3.$$

Hinweis: Schreiben Sie $z=a+bi,\ a,b\in\mathbb{R}$ und verwenden Sie

$$z=w \;\Leftrightarrow\; \mathrm{Re}(z)=\mathrm{Re}(w) \text{ und } \mathrm{Im}(z)=\mathrm{Im}(w).$$

Aufgabe 4: (2+2 Punkte)



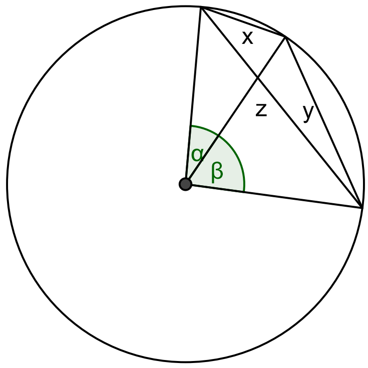
Bestimmen Sie die Summe der markierten Winkel $\alpha+\beta+\gamma$ in der obigen Zeichnung

(a) elementargeometrisch.

(b) unter Verwendung komplexer Zahlen.

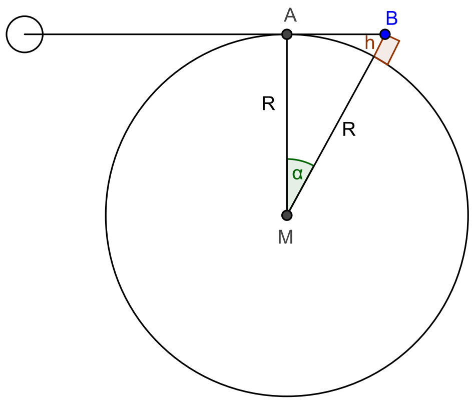
Hinweis: Es handelt sich um drei Quadrate.

Aufgabe 5: (3+3 Punkte)



(a) Aus einem kreisrunden Kuchen mit Radius 1 werden zwei Stücke herausgeschnitten. Die Längen der Kreissehnen der Stücke seien durch x bzw. y gegeben. Leiten Sie eine Formel für die Länge der Kreissehne z her.
Hinweis: Additiontheoreme

(b) Anna und Bastian sitzen am Strand und erwartet den Sonnenuntergang. Bastian steht am Fenster seines Hotelzimmers im fünften Stock genau 20 m über Anna. Dadurch kann er die Sonne etwas länger sehen. Er sieht den Sonnenuntergang 34,5 Sekunden später als Anna. Die beiden versuchen aus dieser Information den Erdradius zu bestimmen.
In der obigen Zeichnung ist A der Standort von Anna, wenn sie den Sonnenuntergang sieht, Bderjenige von Bastian 34,5 Sekunden später. h bezeichne die Höhe seines Aussichtpunkts.



- Wie groß ist α?
- Berechnen Sie daraus den Erdradius R.
Tipp: Für kleine Winkel α gilt näherungsweise $\cos(\alpha) \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}$.