8. Übung zur Vorlesung

„Elementarmathematik“

im Sommersemester 19

Aufgabe 1: (5 Punkte)

Zeichnen Sie die folgenden Teilmengen der komplexen Ebene:

$$A := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) \geq 0, \mathrm{Im}(z) \leq 0\}$$

$$B := \{z^2 \mid z \in A\}$$

$$C := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 2\}$$

$$D := \{\frac{3+4i}{2} z \mid z \in C\}$$

$$E := \{z \in \mathbb{C} \mid |z+1+i| = |z-3-3i|\}$$

Aufgabe 2: (3+2 Punkte)

(a) Berechnen Sie alle sechsten Einheitswurzeln sowohl in der Form $r \cdot \mathrm{cis}(\varphi) = r \cdot (\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$ als auch in der Form $a + bi$ und zeichnen Sie sie in die komplexe Ebene.

(b) Welche davon sind auch dritte Einheitswurzeln, welche zweite?

Aufgabe 3: (2+2+3+2+3+2 Punkte)

Betrachten Sie die Gleichung

$$x^3 + 3x^2 - 2x - 6 = 0. \tag{$*$}$$

(a) Sei $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 6$. Berechne $f(-4)$, $f(-2)$, $f(0)$, $f(2)$. Skizzieren Sie den Graphen von f. Wie viele reelle Lösungen hat $(*)$?

Im Folgenden wollen wir die Nullstellen berechnen:
Im ersten Schritt substituiert man dazu $y = x + \frac{a}{3}$ in der Gleichung $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$. Damit bringt man die Gleichung auf die Form

$$y^3 + py + q = 0.$$

(b) Zeigen Sie: Mit diesem Trick bringt man $(*)$ auf die Form

$$y^3 - 5y - 2 = 0. \tag{$**$}$$

Cardano hat gezeigt:
$z = u - \frac{p}{3u}$ mit $u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$ ist eine Lösung der Gleichung $z^3 + pz + q = 0$.
Weitere Details finden Sie im Vorlesungsskript.

(c) Verwenden Sie diese Formel um eine Lösung y von $(**)$ zu bestimmen. Ihre Lösung sollte den Wurzelausdruck $\sqrt[3]{1 + \frac{7}{3}\sqrt{-\frac{2}{3}}}$ enthalten.

(d) Zeigen Sie $\left(-1+\sqrt{-\frac{2}{3}}\right)^3 = 1+\frac{7}{3}\sqrt{-\frac{2}{3}}$

(e) Nutzen Sie dies um Ihr Ergebnis aus (c) zu vereinfachen. Welcher Lösung x von $(*)$ entspricht das?

(f) Berechnen Sie jetzt die anderen beiden Lösungen von $(*)$.
Hinweis: Polynomdivision.