Juniorprof. Dr. Ariyan Javanpeykar L. Biroth

9. Übung zur Vorlesung

„Elementarmathematik“

im Sommersemester 19

Aufgabe 1: (1+1,5+1,5+1,5+1,5 Punkte)

Vereinfachen Sie:

(a) $\frac{3^{(3^3)}}{(3^3)^3}$

(b) $\log_2(10)\log_{10}(2)$

(c) Zeigen Sie: $\log_a(b) = \log_{a^n}(b^n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$

(d) $\log_3(\frac{5}{4}) + \log_9(\frac{24}{5}) - \log_9(\frac{5}{6})$

(e) $\frac{\ln(10^{\ln(e^2)})}{\ln(5)+\ln(2)}$

Aufgabe 2: (2+2+1+1 Punkte)

(a) ln(10) ist die Fläche zwischen der Hyperbel $y = \frac{1}{x}$ und der x-Achse im Intervall [1,10]. Nähern Sie ln(10) durch die Fläche von 3 gleich breiten Trapezen an. (Rechnung und Skizze)

(b) Zeigen Sie, dass $\ln(10) \approx \frac{10}{3}\ln(2) - \frac{1}{125}$.

Hinweis: Schreiben Sie $\ln(\frac{2^{10}}{10^3})$ auf zwei verschiedene Arten und benutzen Sie die Näherung $\ln(1+x) \approx x$ für kleine x.

(c) Setzen Sie in die Formel aus (b) die Näherung $\ln(2) \approx \frac{7}{10}$ (erhält man ebenfalls mit drei Trapezen) ein.

(d) Berechnen sie den Wert von ln(10) mit einem Taschenrechner. Welche Näherung aus (a) oder (c) ist besser?

Aufgabe 3: (2+2+1+2+1 Punkte)

Sei $m \in \mathbb{N}$ beliebig. Die Fläche unter dem Graphen von $f(x) = x^m$ zwischen 0 und einem Punkt $x > 0$ soll berechnet werden. Dazu wählen wir ein $0 < q < 1$. Wir berechnen die Fläche unter dem Graphen von f, indem wir sie mit Rechtecken annähern. Die Grundseite der Rechtecke sei die Strecke zwischen den Punkten $q^{n+1}x$ und $q^n x$ auf der x-Achse und die Höhe der Rechtecke sei $f(q^n x)$.

(a) Fertigen Sie eine Skizze mit dem Graphen von $f(x) = x^m$ an und zeichnen Sie die Punkte $x, qx, q^2x, q^3x, \ldots$ für $q = \frac{4}{5}$ auf der x-Achse sowie die oben beschriebenen Rechtecke in die Skizze ein.

(b) Die Summe der Flächen aller so entstehenden Rechtecke ist

$$O_q = \sum_{n=0}^{\infty}(q^n x - q^{n+1}x)(q^n x)^m.$$

Zeigen Sie:

$$O_q = x^{m+1} \frac{1-q}{1-q^{m+1}}.$$

Tipp: Verwenden Sie die Summenformel für die geometrische Reihe.

(c) Ist O_q für große oder kleine q eine bessere Näherung an die Fläche unter dem Graphen?

(d) Zeigen Sie (ohne Verwendung der Regel von de l'Hôpital): $\lim_{q \to 1} \frac{1-q}{1-q^{m+1}} = \frac{1}{m+1}$
Hinweis: Noch einmal geometrische Summe.

(e) Berechnen Sie den Grenzwert des Flächeninhaltes der Rechtecke für $q \to 1$. Wie groß ist also die Fläche unter dem Graphen?

Aufgabe 4: (1+1+1 Punkte)

Berechnen Sie

(a) $\int_0^2 x^3 + x^2 \, dx$

(b) $\int_0^x t^5 - 7t^4 + t^2 - 1 \, dt$

(c) $\int_{-x}^x t^3 - 3t \, dt$