Name:

Vorname:

Matrikelnummer:

Studiengang:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$
max. Pkte.	15	20	10	25	20	10	100
err. Pkte.							

<u>**Hinweise**</u>:

1. Bitte legen Sie Ihren Personalausweis vor sich hin.
2. Bitte tragen Sie auf jedem Blatt Ihren Namen und auf diesem Deckblatt zusätzlich Ihre Matrikelnummer und Ihren Studiengang ein.
3. Verwenden Sie bitte für jede Aufgabe die dafür vorgesehenen Blätter!
4. Falls Sie die Zusatzblätter verwenden müssen, vermerken Sie bitte die Aufgabe, die Sie auf dem jeweiligen Blatt bearbeiten. Pro Zusatzblatt bearbeiten Sie bitte nur eine einzige Aufgabe.
5. Als Hilfsmittel sind nur Papier, Schreibgeräte und ein Lineal bzw. Geodreieck zugelassen.
6. Zur kurzen Begründung von Sachverhalten genügt es, aus der Vorlesung bekannte Sätze und Beispiele zu benennen. Bringen Sie die Dinge auf den Punkt!
7. Eine Wahr/Falsch-Frage wird nur gewertet, wenn Sie mit Begründung/Gegenbeispiel versehen ist.

Viel Erfolg!

Ich versichere, dass ich die Zulassung zur Teilnahme an der Klausur erworben habe und nehme zur Kenntnis, dass andernfalls meine Lösungen weder korrigiert noch benotet werden.

<u>**Unterschrift**</u>:

Aufgabe 1 (10+5 Punkte)

Beweisen Sie:

a) $3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + \ldots + n \cdot (n+1) = \frac{(n-2)\left(n^2+5n+12\right)}{3}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$.

b) $3^n - 1$ ist für alle geraden $n \in \mathbb{N}$ durch 8 teilbar.

Fortsetzung Aufgabe 1:

Aufgabe 2 (10+5+5 Punkte)

a) Zeigen Sie:

$$1 - \frac{7}{100} + \frac{49}{1000} - \frac{343}{10000} + \cdots = \frac{163}{170}$$

b) Schreiben Sie die Summe $0{,}65\overline{4} + \frac{11}{900}$ als Bruch.

c) Schreiben Sie die Summe $\frac{2}{5} + \frac{9}{65}$ als Dezimalzahl.

Fortsetzung Aufgabe 2:

Aufgabe 3 (3+5+2 Punkte)

a) Auf welchen Rest führt die Division von 143^{1000} durch 12.

b) Zeigen Sie: $(a+b)^{14} \equiv a^{14} + 2a^7b^7 + b^{14} \bmod 7$ für alle $a, b \in \mathbb{Z}$.

c) Gilt $(a+b)^6 \equiv a^6 + b^6 \bmod 6$ für alle $a, b \in \mathbb{Z}$? (Beweisen oder widerlegen!)

Fortsetzung Aufgabe 3:

Aufgabe 4 (2+5+5+3+10 Punkte)

a) Existiert ein $z \in \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft, dass $z^2 + z + |z| + \overline{z} = 0$? (Beweisen oder widerlegen!)

b) Berechnen Sie das Argument und den Betrag der komplexen Zahl

$$\frac{16+8i}{2i-1} + \frac{21i-9}{3i+7}.$$

c) Geben Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung $z^3 = 27$ explizit an. Veranschaulichen Sie diese Lösungen indem Sie die entsprechenden Ortsvektoren in der komplexen Ebene skizzieren.

d) Skizzieren Sie die Menge $M := \{z \in \mathbb{C} : (|z|^2 - 4) \cdot z^2 = 0\}$.

e) Existiert ein $z \in \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft, dass $\overline{z}^2 + z + 1 = 0$? (Beweisen oder widerlegen!)

Fortsetzung Aufgabe 4:

Aufgabe 5 (3+3+4+5+5 Punkte)

a) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion

$$f(x) = \ln\left(\ln\left(x^2\right)\right).$$

b) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion

$$f(x) = x^3 e^{-\frac{2}{x}}.$$

c) Bestimmen Sie eine Funktion $f(x)$, deren Ableitung durch

$$f'(x) = \frac{1}{\left(e^3\right)^{\ln(x^2)}}$$

gegeben ist.

d) Bestimmen Sie durch geschicktes Substituieren eine Funktion $f(x)$, deren Ableitung durch

$$f'(x) = x\cos\left(x^2 + 1\right)$$

gegeben ist.

e) Berechnen Sie mit Hilfe von partieller Integration den Wert des Integrals

$$\int_1^{e^2} \ln(x)dx.$$

Fortsetzung Aufgabe 5:

Aufgabe 6 (3+3+4 Punkte)

a) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung $x^2 + 3x + 3 = 0$.

b) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung $x^3 - 6x - 9 = 0$.

c) Zeigen Sie:

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

Fortsetzung Aufgabe 6:

Zusatzblatt:

Zusatzblatt:

Zusatzblatt: