Theoretische Physik 5

Höhere Quantenmechanik

Wintersemester 2018/2019

Übungsblatt 10

Dozent:	Prof. Dr. Pedro Schwaller	Abgabe: 14.1.2019
Assistent:	Eric Madge	30 Punkte

Sie finden die Übungsblätter online unter `http://www.staff.uni-mainz.de/pschwal/index_1819.html`.
Abgabe bis Montag 14.1.2019 (12:30) im roten Briefkasten 42 (Foyer im Staudingerweg 7).

1. **Proca-Gleichung** **(5 Punkte)**

   Ein massives 4-Vektorfeld $\phi_\mu(x)$, das mit einer äusseren 4-Stromdichte $k_\mu(x)$ wechselwirkt, besitze folgende Lagrange-Dichte

   $$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\Big(\partial_\mu\phi_\nu - \partial_\nu\phi_\mu\Big)\Big(\partial^\mu\phi^\nu - \partial^\nu\phi^\mu\Big) + \frac{1}{2}\mu^2\phi_\mu\phi^\mu + k_\mu\phi^\mu\,.$$

   (a) **(3 Punkte)** Leiten Sie die Feldgleichungen her (*Proca-Gleichung*, von Alexandru Proca (1897-1955) im Jahr 1934 vorgeschlagene Gleichung für die Beschreibung von massiven Teilchen mit Spin 1, sogenannten Vektormesonen).

   (b) **(2 Punkte)** Zeigen Sie, dass im Gegensatz zum elektromagnetischen Feld A_μ die Feldgleichungen nicht die Kontinuitätsgleichung für k_μ zur Folge haben, d.h. es gilt nicht $\partial_\mu k^\mu = 0$. Welche Bedingung muss das Feld ϕ_μ erfüllen, damit die Kontinuitätsgleichung erfüllt ist?

2. **Noether-Theorem** **(10 Punkte)**

   Betrachten Sie eine Lagrangedichte $\mathcal{L}[\phi_n, \partial_\mu\phi_n]$ die von Feldern ϕ_n abhängt. Die Lagrangedichte weise eine kontinuierliche Symmetrie auf, welche von einem reellen Parameter α abhänge. Unter inifinitesimalen Änderungen des Parameters $\alpha \to \alpha + \delta\alpha$ transformieren die Felder wie $\phi_n \to \phi_n + \delta\phi_n$.

   (a) **(6 Punkte)** Die Forderung, dass dies eine Symmetrie der Lagrangedichte sein soll, bedeutet, dass diese invariant unter solchen Transformationen ist, $\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\alpha} = 0$. Drücken Sie diese Bedingung durch die Variation der Felder $\frac{\delta\phi_n}{\delta\alpha}$ aus und nutzen Sie die Bewegungsgleichungen für ϕ_n um zu zeigen, dass dies auf die folgende Kontinuitätsgleichung führt:

   $$\partial_\mu J^\mu = 0\,, \qquad J^\mu = \sum_n \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_n)}\frac{\delta\phi_n}{\delta\alpha}\,.$$

   Die Stromdichte J^μ wird als *Noether-Strom* bezeichnet.

   (b) **(4 Punkte)** Die Lagrangedichte eines komplexen Klein-Gordon-Feldes $\mathcal{L} = (\partial_\mu\phi)^*(\partial^\mu\phi) - m^2\phi^*\phi$ ist invariant unter Transformationen der Form $\phi \to e^{-i\alpha}\phi,\ \alpha \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie den entsprechenden Noether-Strom.

3. **Energie-Impuls-Tensor** **(10 Punkte)**

   (a) **(6 Punkte)** Der Energie-Impuls-Tensor eines klassischen Feldes $\phi(x)$ mit der Lagrangedichte $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$ lautet

   $$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} \,.$$

   Zeigen Sie, dass sich die Erhaltungsgleichung $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ mit Hilfe des Noether-Theorems aus der Invarianz der Wirkung unter Raumzeittranslationen der Form $x^\mu \to x^\mu + \xi^\mu$ hergeleitet werden kann. Beachten Sie dabei, dass Translationsinvarianz eine Symmetrie der Wirkung (Verifizieren Sie dies!), aber nicht der Lagrangedichte ist, und dass Sie den oben hergeleiteten Noether-Strom daher entsprechend modifizieren müssen.

   (b) **(4 Punkte)** Berechnen Sie die Energie und den Impuls des Klein-Gordon-Feldes

   $$H = P^0 = \int \mathrm{d}^3x \, T^{00} \,, \qquad P^i = \int \mathrm{d}^3x \, T^{0i}$$

   als Funktion des Feldes und seiner Ableitungen.

4. **Wahrscheinlichkeit** **(5 Punkte)**

   In der nicht-relativistischen Quantenmechanik beruht die Interpretation der Wellenfunktion $\psi(\vec{x}, t)$ als Wahrscheinlichkeistamplitude auf der Gültigkeit der Kontinuitätsgleichung $\dot{\rho} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$ für die Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho = |\psi|^2$ und die Stromdichte

   $$\vec{j} = \frac{\hbar}{2mi} \left[\psi^* (\vec{\nabla} \psi) - (\vec{\nabla} \psi^*) \psi \right] \,.$$

   (a) **(1 Punkt)** Leiten Sie diese Kontinuitätsgleichung mit Hilfe der Schrödingergleichung für ein nicht-relativistisches freies Teilchen der Masse m her.

   (b) **(2 Punkte)** Was ändert sich in der Definition von $\vec{j}$ und in der Herleitung der Kontinuitätsgleichung, wenn das Teilchen mit einem äusseren elektromagnetischen Feld wechselwirkt?

   (c) **(2 Punkte)** Analysieren Sie die Frage, ob auch das Feld $\phi(\vec{x}, t)$ in der Klein-Gordon-Gleichung $(\Box + m^2)\phi = 0$ eine analoge Interpretation erlaubt. Warum kann $|\phi|^2$ in diesem Fall nicht als Wahrscheinlichkeitsdichte interpretiert werden?