Theoretische Physik 5

Höhere Quantenmechanik

Wintersemester 2018/2019

Übungsblatt 11

Dozent: Prof. Dr. Pedro Schwaller — Abgabe: 21.1.2019
Assistent: Eric Madge — 30 Punkte

Sie finden die Übungsblätter online unter `http://www.staff.uni-mainz.de/pschwal/index_1819.html`.
Abgabe bis Montag 21.1.2019 (12:30) im roten Briefkasten 42 (Foyer im Staudingerweg 7).

1. **Das komplexe Skalarfeld** **(20 Punkte)**

Betrachten Sie ein komplexes Skalarfeld ϕ mit Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi^\dagger)(\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^\dagger \phi + \Omega_0 \,. \tag{1}$$

Sie können ϕ und $\phi^\dagger$ im Folgenden als unabhängige Felder betrachten.

(a) **(2 Punkte)** Finden Sie die kanonisch konjugierten Felder zu ϕ und $\phi^\dagger$. Berechnen Sie den Hamiltonoperator als Funktion der Felder und der konjugierten Felder.

(b) **(4 Punkte)** Wir quantisieren die Felder nun und entwickeln ϕ als

$$\phi(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left(a_{\vec{p}}\, e^{-i\,p\cdot x} + b^\dagger_{\vec{p}}\, e^{i\,p\cdot x} \right) ,$$

wobei $p \cdot x = p^\mu x_\mu$, $p^\mu = (E_{\vec{p}}, \vec{p})$ und $E_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$. Drücken Sie $a_{\vec{p}}$ und $b_{\vec{p}}$ als Funktion von ϕ, $\phi^\dagger$ und deren konjugierten Feldern aus.

(c) **(4 Punkte)** Die Feldoperatoren erfüllen die kanonischen gleichzeitigen Vertauschungsrelationen

$$[\phi(t,\vec{x}\,), \pi(t,\vec{y}\,)] = [\phi^\dagger(t,\vec{x}\,), \pi^\dagger(t,\vec{y}\,)] = i\delta^3(\vec{x} - \vec{y}\,) ,$$

wobei alle anderen Kommutatoren am gleichen Zeitpunkt verschwinden. Bestimmen Sie die Kommutatoren für $a^{(\dagger)}_{\vec{p}}$ und $b^{(\dagger)}_{\vec{p}}$.

(d) **(4 Punkte)** Diagonalisieren Sie den Hamiltonoperator, indem Sie diesen durch die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $a^{(\dagger)}_{\vec{p}}$ und $b^{(\dagger)}_{\vec{p}}$ ausdrücken. Wie müssen Sie Ω_0 wählen, damit die Vakuumenergie verschwindet?

(e) **(2 Punkte)** Zeigen Sie, dass ϕ die heisenbergschen Bewegungsgleichungen erfüllt.

(f) **(4 Punkte)** Benutzen Sie die heisenbergschen Bewegungsgleichungen, um zu zeigen, dass die Ladung

$$Q = Q_0 + i \int \mathrm{d}^3 x \, \left(\phi^\dagger(x) \pi^\dagger(x) - \pi(x) \phi(x) \right) \tag{2}$$

zeitlich erhalten ist. Schreiben Sie den Operator Q als Funktion der $a_{\vec{p}}$ und $b_{\vec{p}}$ und berechnen Sie die Ladungen der Zustände $a^\dagger_{\vec{p}}|0\rangle$ und $b^\dagger_{\vec{p}}|0\rangle$. Welchen Wert von Q_0 wählen Sie, damit das Vakuum keine Ladung trägt?

2. **Zwei reelle Skalarfelder** **(10 Punkte)**

(a) **(1 Punkt)** Drücken Sie ϕ und $\phi^\dagger$ in der Lagrangedichte (1) aus Aufgabe 1 durch zwei reelle Felder $\varphi_1 = \frac{\phi+\phi^\dagger}{\sqrt{2}}$ und $\varphi_2 = \frac{\phi-\phi^\dagger}{\sqrt{2}i}$ aus und zeigen Sie, dass dies zu folgendem Lagrangian führt:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}\Big[(\partial_\mu\varphi_j)(\partial^\mu\varphi_j) - m^2\varphi_j^2\Big] + \Omega_0 \,. \tag{3}$$

(b) **(1 Punkt)** Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichungen für ϕ und $\phi^\dagger$ aus (1) und für φ_1 und φ_2 aus (3) äquivalent sind.

(c) **(1 Punkt)** Wir quantisieren nun die rellen Felder:

$$\varphi_j(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}}\left(c_{\vec{p},j}\, e^{-i\,p\cdot x} + c^\dagger_{\vec{p},j}\, e^{i\,p\cdot x}\right)\,, \qquad j = 1, 2\,,$$

mit $[c_{\vec{p},i}, c^\dagger_{\vec{q},j}] = (2\pi)^3\delta^3(\vec{p}-\vec{q})\delta_{ij}$. Drücken Sie die Leiteroperatoren des komplexen Feldes aus Aufgabe 1 durch die Leiteroperatoren der reellen Felder aus.

(d) **(3 Punkte)** Leiten Sie die bereits in Aufgabe 1 hergeleiteten Kommutatorrelationen der Leiteroperatoren des komplexen Feldes aus den Kommutatoren der $c^{(\dagger)}_{\vec{p},j}$ her.

(e) **(2 Punkte)** Der Hamiltonoperator ausgedrückt durch die Leiteroperatoren ist gegeben durch

$$H = \sum_{j=1}^{2}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}E_{\vec{p}}\left(c^\dagger_{\vec{p},j}\, c_{\vec{p},j} + \frac{1}{2}[c_{\vec{p},j}, c^\dagger_{\vec{p},j}]\right) - \int \mathrm{d}^3x\Omega_0\,.$$

Ersetzen Sie die Leiteroperatoren durch die des komplexen Feldes und zeigen Sie, dass Sie das gleiche Ergebnis wie in Aufgabe 1 erhalten.

(f) **(2 Punkte)** Drücken Sie den Ladungsoperator (2) durch $c^{(\dagger)}_{\vec{p},j}$ aus. Sind $c^\dagger_{\vec{p},1}|0\rangle$ und $c^\dagger_{\vec{p},2}|0\rangle$ Eigenzustände des Operators?