Theoretische Physik 5
Höhere Quantenmechanik
Wintersemester 2018/2019
Übungsblatt 12

Dozent:	Prof. Dr. Pedro Schwaller	Abgabe: 28.1.2019
Assistent:	Eric Madge	30 Punkte

Sie finden die Übungsblätter online unter `http://www.staff.uni-mainz.de/pschwal/index_1819.html`.
Abgabe bis Montag 28.1.2019 (12:30) im roten Briefkasten 42 (Foyer im Staudingerweg 7).

1. **Standarddarstellung der Dirac-Matrizen** **(3 Punkte)**
   Die Dirac-Matrizen γ^μ mit $\mu = 0, \ldots, 3$ sind in Standarddarstellung durch
   $$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_2 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$$
   gegeben, wobei σ^i für $i = 1, 2, 3$ die Pauli-Matrizen sind. Zeigen Sie, dass die oben definierten Matrizen die Definitionsgleichung der Dirac-Matrizen $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\,\eta^{\mu\nu}\,\mathbb{1}_4$ erfüllen.

   Hinweis: Die Pauli-Matrizen erfüllen die Identität $\sigma^i\sigma^j = i\epsilon^{ijk}\sigma^k + \delta^{ij}\,\mathbb{1}_2$.

2. **Clifford-Algebra der Dirac-Matrizen** **(17 Punkte)**
   Wir betrachten die Clifford-Algebra der Dirac-Matrizen γ^μ, welche $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\,\eta^{\mu\nu}\,\mathbb{1}_4$ erfüllen. Darüberhinaus definieren wir die Matrix $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$, welche $\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$ und $(\gamma^5)^2 = \mathbb{1}_4$ erfüllt.

   (a) **(2 Punkte)** Leiten Sie die Darstellung $\gamma^5 = \frac{i}{4!}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma$ her, wobei das Levi-Civita-Symbol ϵ antisymmetrisch unter Indexvertauschung ist und $\epsilon_{0123} = 1$.

   (b) Zeigen Sie die folgenden Spuridentitäten.
      i. **(1 Punkt)** $\mathrm{Tr}(\gamma^\mu) = 0$
      ii. **(3 Punkte)** $\mathrm{Tr}(\gamma^5) = \mathrm{Tr}(\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu) = 0$
      iii. **(2 Punkte)** $\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) = 4\eta^{\mu\nu}$
      iv. **(3 Punkte)** $\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma) = 4(\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma} - \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho})$
      v. **(3 Punkte)** $\mathrm{Tr}(\gamma^{\mu_1}\ldots\gamma^{\mu_{2n+1}}) = \mathrm{Tr}(\gamma^5\gamma^{\mu_1}\ldots\gamma^{\mu_{2n+1}}) = 0$

   (c) **(3 Punkte)** Zeigen Sie, dass die Matrizen
   $$\Gamma_S = \mathbb{1}_4\,, \quad \Gamma_P = \gamma^5\,, \quad \Gamma_V^\mu = \gamma^\mu\,, \quad \Gamma_A^\mu = \gamma^\mu\gamma^5\,, \quad \Gamma_T^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = -\Gamma_T^{\nu\mu}$$
   linear unabhängig sind und damit eine Basis der komplexen 4×4 - Matrizen bilden. Stellen Sie hierzu die Null-Matrix als allgemeine Linearkombination
   $$A = a\Gamma_S + b\Gamma_P + c_\mu\Gamma_V^\mu + d_\mu\Gamma_A^\mu + e_{\mu\nu}\Gamma_T^{\mu\nu}$$
   mit $e_{\mu\nu} = -e_{\nu\mu}$ dar und folgern Sie, indem Sie mit geeigneten Γ-Matrizen multiplizieren und die Spur bilden, dass die Koeffizienten verschwinden.

Hinweis:
Nutzen Sie nur die in der Aufgabenstellung angegebenen Eigenschaften und keine explizite Darstellung. Es kann hilfreich sein, innerhalb einer Spur eine $\mathbb{1}_4$ einzufügen, diese als Quadrat einer Dirac-Matrix zu schreiben, und dann einen Faktor innerhalb der Spur durch Ausnutzen der Antikommutationsrelationen und der zyklischen Invarianz der Spur zu bewegen.

3. **Feynman-Slash-Notation** **(4 Punkte)**
   In der Vorlesung wurde die Feynman-Slash-Notation $\not{p} = p_\mu \gamma^\mu$ eingeführt.
   (a) **(2 Punkte)** Zeigen Sie, dass $\left(\not{p} + m\mathbb{1}_4\right)\left(\not{p} - m\mathbb{1}_4\right) = (p^2 - m^2)\,\mathbb{1}_4$ gilt.
   (b) **(2 Punkte)** Leiten Sie die folgende Identität her:

$$\mathrm{Tr}\left[\left(\not{p} - m\mathbb{1}_4\right)\gamma^\mu\left(\not{q} + m\mathbb{1}_4\right)\gamma^\nu\right] = 4\left[p^\mu q^\nu + p^\nu q^\mu - \eta^{\mu\nu}\left(p\cdot q + m^2\right)\right] .$$

4. **Spin-Summen der Dirac-Spinoren** **(6 Punkte)**
   Die Lösungen der Dirac-Gleichung werden in der Standarddarstellung mittels der Spinoren

$$u_s(p) = \frac{1}{\sqrt{p^0 + m}}\begin{pmatrix}(p^0 + m)\chi_s \\ (\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\chi_s\end{pmatrix}, \qquad v_s(p) = \frac{1}{\sqrt{p^0 + m}}\begin{pmatrix}(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\phi_s \\ (p^0 + m)\phi_s\end{pmatrix}$$

mit $s = \pm\frac{1}{2}$ konstruiert. Die Weyl-Spinore χ_s und ϕ_s erfüllen die Vollständigkeitsrelationen

$$\sum_{s=\pm\frac{1}{2}} \chi_s \chi_s^\dagger = \mathbb{1}_2\,, \qquad \sum_{s=\pm\frac{1}{2}} \phi_s \phi_s^\dagger = \mathbb{1}_2\,.$$

Leiten Sie die Spinsummen

$$\sum_{s=\pm\frac{1}{2}} u_s(p)\bar{u}_s(p) = \not{p} + m\mathbb{1}_4\,, \qquad \sum_{s=\pm\frac{1}{2}} v_s(p)\bar{v}_s(p) = \not{p} - m\mathbb{1}_4$$

her. $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$ beschreibt hierbei den zu ψ Dirac-konjugierten Spinor.

Hinweis: Nutzen Sie Erkenntnisse aus den Aufgaben 1 und 3.