Theoretische Physik 5
Höhere Quantenmechanik
Wintersemester 2018/2019
Übungsblatt 13

Dozent:	Prof. Dr. Pedro Schwaller	Abgabe: 04.02.2019
Assistent:	Eric Madge	30 Punkte

Sie finden die Übungsblätter online unter `http://www.staff.uni-mainz.de/pschwal/index_1819.html`.
Abgabe bis Montag 04.02.2019 (12:30) im roten Briefkasten 42 (Foyer im Staudingerweg 7).

1. **Zerfall eines Skalarteilchens** **(20 Punkte)**

Betrachten Sie die Theorie eines reellen Skalarteilchens ρ mit Masse M, das an ein komplexes Skalarteilchen ϕ mit Masse m koppelt. Nehmen Sie im Folgenden an, dass $M > 2m$. Der entsprechende Lagrangian ist gegeben durch

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\rho\,\partial^\mu\rho - M^2\rho^2\right) + \partial_\mu\phi^\dagger\partial^\mu\phi - m^2\phi^\dagger\phi - \kappa\,\rho\,\phi^\dagger\phi\,.$$

(a) **(1 Punkt)** Zeigen Sie, dass sich der entsprechende Hamiltonoperator in der Form $H = H_0 + H_{\text{int}}$ schreiben lässt, wobei $H_0 = H_0^\rho + H_0^\phi$ die Hamiltonoperatoren der freien Felder beinhaltet und $H_{\text{int}} = \kappa\int \mathrm{d}^3x\,\rho\,\phi^\dagger\phi$ die Wechselwirkung der Felder beschreibt.

Wir arbeiten nun im Wechselwirkungsbild und quantisieren die Felder,

$$\phi(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\,E_{\vec{p},m}}}\left(a_{\vec{p}}\,e^{-i\,p_\nu x^\nu} + b^\dagger_{\vec{p}}\,e^{i\,p_\nu x^\nu}\right)\,,$$

$$\rho(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\,E_{\vec{p},M}}}\left(c_{\vec{p}}\,e^{-i\,p_\nu x^\nu} + c^\dagger_{\vec{p}}\,e^{i\,p_\nu x^\nu}\right)\,,$$

wobei $E_{\vec{p},m_i} = \sqrt{(\vec{p})^2 + m_i^2}$ und $p^\mu = \left(E_{\vec{p},m_i}, \vec{p}\right)$ für $i = \rho, \phi$ mit $m_\rho = M,\ m_\phi = m$. Aus der Vorlesung wissen Sie, dass das Streumatrixelement für den Übergang von einem Anfangszustand $|i\rangle$ bei $t = -\infty$ in einen Endzustand $|f\rangle$ bei $t = +\infty$ gegeben ist durch

$$S_{fi} = \langle f|S|i\rangle = \langle f|T\exp\left(-i\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t\,H_{\text{int}}(t)\right)|i\rangle\,.$$

(b) **(6 Punkte)** Betrachten Sie den Zerfall $\rho \to \phi^\dagger\phi$. Berechnen Sie dazu das S-Matrixelement für $|i\rangle = \sqrt{2\,E_{\vec{p}_1,M}}\,c^\dagger_{\vec{p}_1}\,|0\rangle$ und $|f\rangle = \sqrt{2\,E_{\vec{p}_2,m}}\,\sqrt{2\,E_{\vec{p}_3,m}}\,a^\dagger_{\vec{p}_2}\,b^\dagger_{\vec{p}_3}\,|0\rangle$ zu führender Ordnung in κ.

(c) **(5 Punkte)** Die Zerfallsbreite eines Teilchens mit Masse M in n Teilchen ist im Ruhesystem gegeben durch

$$\Gamma = \frac{1}{2M}\int \left(\prod_j \frac{d^3p_j}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\vec{p}_j,m_j}}\right)(2\pi)^4\delta^4(P-\sum_j p_j)\,|\mathcal{A}(i\to f)|^2$$

wobei $\mathcal{A}(i\to f) = \langle f|T|i\rangle$ mit $S = 1 + i\,(2\pi)^4\,\delta^4(P-\sum_j p_j)\,T$. P ist der Viererimpuls des zerfallenen Teilchens und der Index j läuft über die Zerfallsprodukte. Berechnen Sie die Zefallsbreite aus dem oben berechneten Matrixelement.

(d) **(6 Punkte)** Wir erweitern unsere Theorie nun um ein weiteres reelles Skalarteilchen σ mit Masse $m_\sigma < M/2$, welches mit ρ über den Term $\mathcal{L} \supset -\frac{\kappa'}{2}\,\rho\,\sigma^2$ wechselwirke. Berechnen Sie die Zerfallsbreite für den Zerfall $\rho \to 2\sigma$. Beachten Sie, dass Sie für den Zerfall in zwei identische Teilchen einen zusätzlichen Symmetriefaktor $\frac{1}{2}$ in der Formel für die Zerfallsbreite berücksichtigen müssen.

Wir identifizieren nun ρ mit dem kurzlebigen neutralen Kaon K_S^0, $\phi^{(\dagger)}$ mit den geladenen Pionen $\pi^\pm$ und σ mit dem neutralen Pion π^0. Die Massen dieser Teilchen sind $m_{K^0} = 498\,\text{MeV}$, $m_{\pi^\pm} = 140\,\text{MeV}$, $m_{\pi^0} = 135\,\text{MeV}$. Nehmen Sie ferner an, dass $\kappa' = \kappa$.

(e) **(1 Punkt)** Berechnen Sie die Verzweigungsverhältnisse

$$\text{Br}_{\pi^+\pi^-} = \frac{\Gamma(K_S^0 \to \pi^+\pi^-)}{\Gamma_\text{tot}} \qquad \text{und} \qquad \text{Br}_{2\pi^0} = \frac{\Gamma(K_S^0 \to 2\pi^0)}{\Gamma_\text{tot}}$$

mit der totalen Zerfallsbreite $\Gamma_\text{tot} = \Gamma(K_S^0 \to \pi^+\pi^-) + \Gamma(K_S^0 \to 2\pi^0)$.

(f) **(1 Punkt)** Die Lebensdauer eines Teilchens ist gegeben durch $\tau = 1/\Gamma_\text{tot}$. Wie müssen Sie κ wählen (in eV), damit Sie den Literaturwert $\tau_{K_S^0} = 90\,\text{ps}$ bekommen?

2. **Spontane Symmetriebrechung** **(10 Punkte)**

Spontane Symmetriebrechung ist ein wichtiges Thema. Ein einfaches, klassisches Beispiel, das spontane Symmetriebrechung aufweist, ist durch die Lagrangedichte eines Skalars mit negativem Masseterm beschrieben:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi + \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4\,.$$

(a) **(3 Punkte)** Wie viele Konstanten v können Sie finden, für die $\phi(x) = v$ eine Lösung der Bewegungsgleichungen ist? Welche Lösung hat die niedrigste Energiedichte (Grundzustand)?

(b) **(2 Punkte)** Der Lagrangian weist eine Symmetrie unter $\phi \to -\phi$ auf. Zeigen Sie, dass der Grundzustand diese Symmetrie nicht erfüllt. Wir nennen v den Vakuumerwartungswert von ϕ und schreiben $\langle\phi\rangle = v$. In diesem Vakuum ist die $\mathbb{Z}_2$-Symmetrie $\phi \to -\phi$ spontan gebrochen.

(c) **(5 Punkte)** Schreiben Sie $\phi(x) = v + \pi(x)$ und setzen Sie dies wieder in die Lagrangedichte ein. Zeigen Sie nun, dass $\pi = 0$ eine Lösung der Bewegungsgleichungen ist. Wie transformiert π unter der $\mathbb{Z}_2$-Symmetrie $\phi \to -\phi$? Zeigen Sie, dass dies eine Symmetrie der Lagrangedichte von π ist.