Theoretische Physik 5

Höhere Quantenmechanik

Wintersemester 2018/2019

Übungsblatt 1

Dozent:	Prof. Dr. Pedro Schwaller	Abgabe: 22.10.2018
Assistent:	Eric Madge	30 Punkte

Sie finden die Übungsblätter online unter `http://www.staff.uni-mainz.de/pschwal/index_1819.html`.
Abgabe bis Montag 22.10.2018 (12:00) im roten Briefkasten 42 (Foyer im Staudingerweg 7).

1. **Einteilchen-Hilbertraum** **(5 Punkte)**

   Sei $\{|x, i\rangle\}$ eine orthonormierte Basis eines Einteilchen-Hilbertraums V_1. x sei ein kontinuierlicher Index, i ein diskreter.

   (a) **(1 Punkt)** Welchen Wert nimmt das Skalarprodukt zweier Basiselemente an?

   (b) **(1 Punkt)** Geben Sie die Vollständigkeitsrelation bezüglich der gegebenen Basis an.

   (c) **(3 Punkte)** Entwickeln Sie zwei Zustände $|\psi\rangle$ und $|\chi\rangle$ bezüglich der gegebenen Basis. Wie können Sie die Entwicklungskoeffizienten berechnen? Stellen Sie das Skalarprodukt $\langle\psi|\chi\rangle$ mittels der Entwicklungskoeffizienten dar. Welche Bedingung muss für die Entwicklungskoeffizienten gelten, damit $|\psi\rangle$ ein normierter Zustand ist?

2. **N-Teilchen-Hilbertraum** **(8 Punkte)**

   Wir konstruieren nun einen Hilbertraum N identischer Teilchen

   $$V_N = V_1 \otimes \cdots \otimes V_1 \,.$$

   Wir definieren N-Teilchenzustände, die in ein Produkt aus Einteilchenzuständen zerfallen, wie folgt:

   $$|\alpha_{(N)}\rangle = |\alpha_1, \ldots, \alpha_N\rangle = |\alpha_1\rangle_1 \otimes \cdots \otimes |\alpha_N\rangle_N \,.$$

   V_N ist nun als Raum aller Linearkombinationen solcher Produktzustände definiert.

   (a) **(1 Punkt)** Wie sieht das Skalarprodukt zweier Produktzustände $|\psi_{(N)}\rangle$ und $|\chi_{(N)}\rangle$ ausgedrückt durch Einteilchenskalarprodukte aus?

   (b) **(1 Punkt)** Wie sieht das Skalarprodukt zweier allgemeiner Zustände $|\psi_{(N)}\rangle$ und $|\chi_{(N)}\rangle$ aus? Stellen Sie hierzu $|\psi_{(N)}\rangle$ und $|\chi_{(N)}\rangle$ als Linearkombinationen von Produktzuständen dar.

   (c) **(1 Punkt)** Konstruieren Sie eine Orthonormalbasis für V_N unter Zuhilfenahme der Basis von V_1.

(d) **(1 Punkt)** Geben Sie die Vollständigkeitsrelation bezüglich der konstruierten Basis an.

(e) **(4 Punkte)** Entwickeln Sie einen Zustand $|\psi_{(N)}\rangle$ bezüglich der Basis. Wie können Sie die Entwicklungskoeffizienten berechnen? Welche Bedingung muss für die Entwicklungskoeffizienten gelten, damit $|\psi_{(N)}\rangle$ ein normierter Zustand ist? Wie sehen die Entwicklungskoeffizienten aus, wenn es sich bei $|\psi_{(N)}\rangle$ um einen Produktzustand handelt?

3. **Die Permutationsgruppe** **(17 Punkte)**

Sei S_N die Gruppe der Permutationen von N Objekten und $\sigma \in S_N$.

(a) **(2 Punkte)** Wie viele Elemente enthält die Gruppe S_N? Wie viele Elemente enthält die Untergruppe der geraden Permutationen ($\mathrm{sign}(\sigma) = +1$)? (Man nennt diese Untergruppe die alternierende Gruppe.)

(b) **(6 Punkte)** Der mit der Permutation σ verbundene Quantenoperator $\hat{\sigma}$ wirkt wie folgt auf einen Produktzustand von N Teilchen,

$$\hat{\sigma}\,[\psi_1(x_1)\dots\psi_N(x_N)] = \psi_{\sigma(1)}(x_1)\dots\psi_{\sigma(N)}(x_N)\,.$$

Da Produktzustände eine Basis des N-Teilchen-Hilbertraums bilden, ist die Wirkung von $\hat{\sigma}$ durch Linearität definiert. Der quantenmechanische Symmetrisierungsoperator Sym und der Antisymmetrisierungsoperator Asym werden wie folgt definiert,

$$\mathrm{Sym} = N_S \sum_{\sigma\in S_N} \hat{\sigma}\,, \qquad \mathrm{Asym} = N_A \sum_{\sigma\in S_N} \mathrm{sign}(\sigma)\hat{\sigma}\,,$$

wobei $N_S,\ N_A$ geeignete Normierungsfaktoren sind. Bestimmen Sie $N_S,\ N_A$, so dass Sym und Asym Projektionsoperatoren sind, $\mathrm{Sym}^2 = \mathrm{Sym}$, $\mathrm{Asym}^2 = \mathrm{Asym}$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Sym}\,\mathrm{Asym} = \mathrm{Asym}\,\mathrm{Sym} = 0$. Gilt dann auch $\mathrm{Sym} + \mathrm{Asym} \stackrel{?}{=} 1$?

(c) **(4 Punkte)** Bestimmen Sie den Normierungsfaktor C_S für symmetrische N-Teilchenwellenfunktionen

$$\psi^{(s)}_{c_1\dots c_N}(x_1,\dots,x_N) = C_S \sum_{\sigma\in S_N} \psi_{\sigma(c_1)}(x_1)\dots\psi_{\sigma(c_N)}(x_N)\,,$$

wobei die Einteilchenwellenfunktionen $\psi_c(x)$ folgende Orthonormalitätsrelationen erfüllen,

$$\int \mathrm{d}x\, \psi_b(x)^*\psi_c(x) = \delta_{bc}\,.$$

Wir nehmen an, dass alle c_i unterschiedlich sind.

(d) **(5 Punkte)** Die Dimension des Einteilchen-Hilbertraums V_1 sei $(2s+1)$ (das ist z.B. der Fall für lokalisierte Teilchen mit Spin s). Berechnen Sie die Dimension folgender Räume:

i. des Hilbertraums der Produktzustände $V_N = V_1 \otimes \dots \otimes V_1$ für N Teilchen;
ii. des Hilbertraums für symmetrische Zustände (Bosonen) $\mathrm{Sym}\,V_N$;
iii. des Hilbertraums für antisymmetrische Zustände (Fermionen) $\mathrm{Asym}\,V_N$.