Theoretische Physik 5

Höhere Quantenmechanik

Wintersemester 2018/2019

Übungsblatt 2

Dozent: Prof. Dr. Pedro Schwaller — Abgabe: 29.10.2018
Assistent: Eric Madge — 30 Punkte

Sie finden die Übungsblätter online unter `http://www.staff.uni-mainz.de/pschwal/index_1819.html`.
Abgabe bis Montag 29.10.2018 (12:00) im roten Briefkasten 42 (Foyer im Staudingerweg 7).

1. **Bosonische Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren** **(12 Punkte)**

   (a) **(2 Punkte)** Sei

   $$|N_1, N_2, \ldots\rangle \equiv \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{N_k!}} (a_k^\dagger)^{N_k} |0\rangle$$

   ein Basiszustand in der Besetzungszahldarstellung für Bosonen. Die Wirkung der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren auf diese Zustände ist gegeben durch

   $$\begin{aligned} \hat{a}_k^\dagger |N_1, N_2, \ldots, N_k, \ldots\rangle &= \sqrt{N_k + 1}\, |N_1, N_2, \ldots, N_k + 1, \ldots\rangle \,, \\ \hat{a}_k |N_1, N_2, \ldots, N_k, \ldots\rangle &= \sqrt{N_k}\, |N_1, N_2, \ldots, N_k - 1, \ldots\rangle \,. \end{aligned}$$

   Leiten Sie daraus die Vertauschungsrelation $[\hat{a}_k, \hat{a}_l^\dagger] = \delta_{kl}$ her.

   (b) **(4 Punkte)** Berechnen Sie folgende Kommutatoren ($\hat{N}_k = \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k$, $\hat{N} = \sum_k \hat{N}_k$):

   i. $[\hat{N}_k, \hat{a}_l]$ ii. $[\hat{N}_k, \hat{a}_l^\dagger]$ iii. $[\hat{N}, \hat{a}_l]$ iv. $[\hat{N}, \hat{a}_l^\dagger]$

   (c) **(6 Punkte)** In der selben Notation wie in Teilaufgabe (a), zeigen Sie, dass der Zustand

   $$|\phi\rangle = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \phi_k \hat{a}_k^\dagger\right) |0\rangle, \qquad \phi_k \in \mathbb{C}$$

   wie folgt in der Basis der Fock-Zustände entwickelt werden kann,

   $$|\phi\rangle = \sum_{N_1, N_2, \ldots} \left(\prod_k \frac{1}{\sqrt{N_k!}} \phi_k^{N_k}\right) |N_1, N_2, \ldots\rangle \,.$$

   Zeigen Sie, dass

   $$\hat{a}_k |\phi\rangle = \phi_k |\phi\rangle \qquad \forall k \,.$$

2. **Fermionische Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren** **(18 Punkte)**

(a) **(3 Punkte)** Leiten Sie aus den Antivertauschungsregeln für $\hat{a}_k$, $\hat{a}_k^\dagger$

$$\{\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}\} = \{\hat{a}_k^\dagger, \hat{a}_{k'}^\dagger\} = 0\,, \qquad \{\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^\dagger\} = \delta_{k,k'}$$

die Eigenschaft

$$\hat{N}_k(\hat{N}_k - 1) = 0$$

für $\hat{N}_k \equiv \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k$ her. Zeigen Sie, dass in einem beliebigen Zustand $|\psi\rangle$ von N Fermionen für den Erwartungswert der Besetzungszahlen $N_k = \langle\psi|\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k|\psi\rangle$ die Ungleichungen $0 \leq N_k \leq 1$ gelten.

(b) **(4 Punkte)** Berechnen Sie folgende Kommutatoren ($\hat{N}_k = \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k,\ \hat{N} = \sum_k \hat{N}_k$):

i. $[\hat{N}_k, \hat{a}_l]$ ii. $[\hat{N}_k, \hat{a}_l^\dagger]$ iii. $[\hat{N}, \hat{a}_l]$ iv. $[\hat{N}, \hat{a}_l^\dagger]$

(c) **(3 Punkte)** Zeigen Sie, dass für fermionische Feldoperatoren

$$\{\hat{\phi}(\vec{x}), \hat{\phi}(\vec{y})\} = \{\hat{\phi}^\dagger(\vec{x})), \hat{\phi}^\dagger(\vec{y})\} = 0\,, \qquad \{\hat{\phi}(\vec{x}), \hat{\phi}^\dagger(\vec{y})\} = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})$$

die folgende Beziehung gilt,

$$\begin{aligned}&\hat{\phi}^\dagger(\vec{x})\hat{\phi}^\dagger(\vec{y})\hat{\phi}(\vec{y})\hat{\phi}(\vec{x})\hat{\phi}^\dagger(\vec{x}_1)\hat{\phi}^\dagger(\vec{x}_2)\hat{\phi}^\dagger(\vec{x}_3)\hat{\phi}^\dagger(\vec{x}_4)|0\rangle \\ &= f(\vec{x}, \vec{y}; \vec{x}_1 \ldots \vec{x}_4)\hat{\phi}^\dagger(\vec{x}_1)\hat{\phi}^\dagger(\vec{x}_2)\hat{\phi}^\dagger(\vec{x}_3)\hat{\phi}^\dagger(\vec{x}_4)|0\rangle\end{aligned}$$

und geben Sie die Funktion f an.

(d) **(4 Punkte)** Zeigen Sie dass der Operator

$$\hat{V} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{d}^3y\, V(\vec{x} - \vec{y})\hat{\phi}^\dagger(\vec{x})\hat{\phi}^\dagger(\vec{y})\hat{\phi}(\vec{y})\hat{\phi}(\vec{x})$$

in der Besetzungszahldarstellung für Fermionen auf den Zustand

$$|\psi\rangle = \int \mathrm{d}^3x_1 \ldots \mathrm{d}^3x_N \psi(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_N)\hat{\phi}^\dagger(\vec{x}_1)\ldots\hat{\phi}^\dagger(\vec{x}_N)|0\rangle$$

wie folgt wirkt,

$$\hat{V}|\psi\rangle = \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{N} \int \mathrm{d}^3x_1 \ldots \mathrm{d}^3x_N V(\vec{x}_i - \vec{x}_j)\psi(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_N)\hat{\phi}^\dagger(\vec{x}_1)\ldots\hat{\phi}^\dagger(\vec{x}_N)|0\rangle\,.$$

(e) **(4 Punkte)** Sei

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V} \qquad \hat{H}_0 = \int \mathrm{d}^3x\, \hat{\phi}^\dagger(\vec{x})\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\,\Delta + U(\vec{x})\right)\hat{\phi}(\vec{x})$$

der Hamiltonoperator in der Besetzungszahldarstellung. U sei ein externes Potential und V das Paarwechselwirkungspotential aus Teilaufgabe (d). Zeigen Sie, dass die Schrödinger Gleichung $i\hbar\partial_t|\psi_t\rangle = \hat{H}|\psi_t\rangle$ genau dann erfüllt ist, wenn die Wellenfunktion $\psi(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_N; t)$ der Ortsraum-Schrödingergleichung

$$i\hbar\partial_t\psi(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_N; t) = \left[\sum_{j=1}^{N}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\,\Delta_j + U(\vec{x}_j)\right) + \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{N} V(\vec{x}_i - \vec{x}_j)\right]\psi(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_N; t)$$

genügt.