Theoretische Physik 5
Höhere Quantenmechanik
Wintersemester 2018/2019
Übungsblatt 4

Dozent: Prof. Dr. Pedro Schwaller — Abgabe: 19.11.2018
Assistent: Eric Madge — 30 Punkte

Sie finden die Übungsblätter online unter `http://www.staff.uni-mainz.de/pschwal/index_1819.html`.
Abgabe bis Montag 19.11.2018 (12:30) im roten Briefkasten 42 (Foyer im Staudingerweg 7).

1. **Bogoliubov-Transformation** **(15 Punkte)**

   Betrachten Sie ein verdünntes Gas schwach wechselwirkender Bosonen bei niedriger Temperatur in einem endlichen Volumen V. In der Bogoliubov-Näherung lautet der entprechende Hamilton-Operator

$$\hat{H} = \sum_{\vec{p}\neq\vec{0}} \frac{p^2}{2m}\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\hat{a}_{\vec{p}} + \frac{N^2}{2V}\tilde{V}^{(2)}_0 + \frac{N}{2V}\sum_{\vec{p}\neq\vec{0}} \tilde{V}^{(2)}(\vec{p})\left(\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\hat{a}^\dagger_{-\vec{p}} + 2\,\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\hat{a}_{\vec{p}} + \hat{a}_{\vec{p}}\hat{a}_{-\vec{p}}\right), \tag{1}$$

   wobei $\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}$ und $\hat{a}_{\vec{p}}$ bosonische Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren im Impulsraum sind. Ferner sei $\tilde{V}^{(2)}(\vec{p})$ das Zwei-Teilchen-Wechselwirkungspotential mit $\tilde{V}^{(2)}(\vec{p}) = \tilde{V}^{(2)}(-\vec{p})$ und $\tilde{V}^{(2)}_0 = \tilde{V}^{(2)}(\vec{0})$. Die Bogoliubov-Transformation der Leiteroperatoren ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \hat{b}_{\vec{p}} &= u_{\vec{p}}\,\hat{a}_{\vec{p}} + v_{\vec{p}}\,\hat{a}^\dagger_{-\vec{p}}\,, \\ \hat{b}^\dagger_{\vec{p}} &= u^*_{\vec{p}}\,\hat{a}^\dagger_{\vec{p}} + v^*_{\vec{p}}\,\hat{a}_{-\vec{p}}\,, \end{aligned} \tag{2}$$

   wobei $u_{\vec{p}}$ und $v_{\vec{p}}$ komplexe Zahlen sind mit

$$u_{\vec{p}} = u_{-\vec{p}}\,, \qquad v_{\vec{p}} = v_{-\vec{p}}\,, \qquad |u_{\vec{p}}|^2 - |v_{\vec{p}}|^2 = 1\,.$$

   (a) **(3 Punkte)** Berechnen Sie die folgenden Kommutatoren:

   i. $\left[\hat{b}_{\vec{p}}, \hat{b}_{\vec{q}}\right]$ ii. $\left[\hat{b}^\dagger_{\vec{p}}, \hat{b}^\dagger_{\vec{q}}\right]$ iii. $\left[\hat{b}_{\vec{p}}, \hat{b}^\dagger_{\vec{q}}\right]$

   (b) **(2 Punkte)** Berechnen Sie die Umkehrtransformation zu (2), d.h. drücken Sie $\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}$ und $\hat{a}_{\vec{p}}$ durch $\hat{b}^\dagger_{\vec{p}}$ und $\hat{b}_{\vec{p}}$ aus.

   (c) **(3 Punkte)** Nehmen Sie im Folgenden reelle Koeffizienten $u_{\vec{p}}$ und $v_{\vec{p}}$ an. Drücken Sie den Hamilton-Operator $\hat{H}$ durch die transformierten Leiteroperatoren $\hat{b}^\dagger_{\vec{p}}$ und $\hat{b}_{\vec{p}}$ aus. Zeigen Sie, dass die Bogoliubov-Transformation den Hamilton-Operator diagonalisiert (d.h. dass Terme der Form $\hat{b}^\dagger_{\vec{p}}\hat{b}^\dagger_{-\vec{p}}$ und $\hat{b}_{\vec{p}}\hat{b}_{-\vec{p}}$ verschwinden), wenn

$$u_{\vec{p}}\,v_{\vec{p}}\,\frac{p^2}{2m} - \frac{1}{2}\left(u_{\vec{p}} - v_{\vec{p}}\right)^2\frac{N}{V}\tilde{V}^{(2)}(\vec{p}) = 0\,. \tag{3}$$

(d) **(2 Punkte)** Zeigen Sie, dass sich aus (3) die Gleichung

$$u_{\vec{p}}^2\left(u_{\vec{p}}^2-1\right)=\frac{\left(\frac{N}{V}\tilde{V}^{(2)}(\vec{p}\,)\right)^2}{4\;E_{\vec{p}}^2} \tag{4}$$

ergibt und bestimmen Sie $E_{\vec{p}}^2$.

(e) **(5 Punkte)** Leiten Sie aus Gleichung (4) Ausdrücke für $u_{\vec{p}}^2$, $v_{\vec{p}}^2$ und $u_{\vec{p}}v_{\vec{p}}$ her und zeigen Sie, dass der Hamilton-Operator (1) die folgende Form annimmt:

$$\hat{H}=\frac{N^2}{2V}\tilde{V}_0^{(2)}+\frac{1}{2}\sum_{\vec{p}\neq\vec{0}}\left(E_{\vec{p}}-\frac{p^2}{2m}-\frac{N}{V}\tilde{V}^{(2)}(\vec{p}\,)\right)+\sum_{\vec{p}\neq\vec{0}}E_{\vec{p}}\,\hat{b}_{\vec{p}}^{\dagger}\hat{b}_{\vec{p}}\,.$$

Bestimmen Sie die Grundzustandsenergie.

2. **Photonen-Korrleation** **(15 Punkte)**

Betrachten Sie einen Zwei-Bosonen-Zustand

$$|\Psi_{(2)}\rangle=\int \mathrm{d}^3x_1\,\mathrm{d}^3x_2\,\psi(\vec{x}_1,\vec{x}_2)\hat{\phi}^{\dagger}(\vec{x}_1)\hat{\phi}^{\dagger}(\vec{x}_2)|0\rangle$$

mit

$$\psi(\vec{x}_1,\vec{x}_2)=c\,\psi_1(\vec{x}_1)\psi_2(\vec{x}_2)\,,\qquad c\in\mathbb{C}\,,\quad \int \mathrm{d}^3x\,|\psi_i(\vec{x}\,)|^2=1\,.$$

(a) **(2 Punkte)** Zeigen Sie, dass die Normierungsbedingung $\langle\Psi_{(2)}|\Psi_{(2)}\rangle=1$ zu folgender Normierung der Funktion $\psi(\vec{x}_1,\vec{x}_2)$ führt:

$$\psi(\vec{x}_1,\vec{x}_2)=\frac{\psi_1(\vec{x}_1)\psi_2(\vec{x}_2)}{\sqrt{1+|\,(\psi_1,\psi_2)\,|^2}}\,,$$

wobei $(\psi_i,\psi_j)\equiv\int \mathrm{d}^3x\,\psi_i^*(\vec{x}\,)\psi_j(\vec{x}\,)$.

(b) **(6 Punkte)** Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle\Psi_{(2)}|\hat{n}(\vec{x}\,)|\Psi_{(2)}\rangle$ des Dichteoperators $\hat{n}(\vec{x}\,)\equiv\hat{\phi}^{\dagger}(\vec{x}\,)\hat{\phi}(\vec{x}\,)$ im Zustand $|\Psi_{(2)}\rangle$. Welchen Wert erhalten Sie für das Integral $\int \mathrm{d}^3x\,\langle\Psi_{(2)}|\hat{n}(\vec{x}\,)|\Psi_{(2)}\rangle$?

(c) **(3 Punkte)** Wie lautet der Erwartungswert des Dichteoperators

i. wenn die Einteilchenwellenfunktionen orthogonal sind (d.h. $(\psi_1,\psi_2)=0$)?

ii. für den Fall überlappender Normalverteilungen im Abstand $2a$?

$$\psi_1(\vec{x}\,)=\frac{1}{\pi^{\frac{3}{4}}}e^{-\frac{1}{2}(\vec{x}-a\vec{e}_x)^2}\,,\qquad \psi_2(\vec{x}\,)=\frac{1}{\pi^{\frac{3}{4}}}e^{-\frac{1}{2}(\vec{x}+a\vec{e}_x)^2} \tag{5}$$

(d) **(4 Punkte)** Was sind die entsprechenden Wellenfuntionen aus Gleichung (5) und der Erwartungswert der Teilchendichte in einer Dimension? Stellen Sie $\langle\Psi_{(2)}|\hat{n}(x)|\Psi_{(2)}\rangle$ und $|\psi_1(x)|^2+|\psi_2(x)|^2$ für $a=1$ und $a=3$ grafisch dar.