Theoretische Physik 5
Höhere Quantenmechanik
Wintersemester 2018/2019
Übungsblatt 5

Dozent: Prof. Dr. Pedro Schwaller — Abgabe: 26.11.2018
Assistent: Eric Madge — 30 Punkte

Sie finden die Übungsblätter online unter `http://www.staff.uni-mainz.de/pschwal/index_1819.html`.
Abgabe bis Montag 26.11.2018 (12:30) im roten Briefkasten 42 (Foyer im Staudingerweg 7).

1. **Holstein-Primakoff-Transformation** **(15 Punkte)**

   Im Heisenberg-Modell wird ein Ferromagnet durch ein kubisches Gitter von Teilchen mit Spin S beschrieben, welche über den Spin mit ihren nächsten Nachbarn wechselwirken. Der entsprechende Hamilton-Operator ist

$$\hat{H} = -J \sum_{\langle k,l \rangle} \vec{\hat{S}}_k \cdot \vec{\hat{S}}_l$$

   wobei k und l Gitterpositionen bezeichnen und die Summe über Paare nächster Nachbarn läuft. $\vec{\hat{S}}_l$ ist der Spin-Operator für ein Teilchen an der Position l und J ist die Austauschenergie. Mit der Holstein-Primakoff-Transformation,

$$\hat{S}_l^+ = \sqrt{2S - \hat{n}_l}\, \hat{a}_l\,, \qquad \hat{S}_l^- = \hat{a}_l^\dagger \sqrt{2S - \hat{n}_l}\,, \qquad \hat{S}_l^z = S - \hat{n}_l\,, \tag{1}$$

   mit $\hat{S}_l^\pm = \hat{S}_l^x \pm i\hat{S}_l^y$ und $\hat{n}_l = \hat{a}_l^\dagger \hat{a}_l$, können die Spin-Operatoren durch bosonische Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $\hat{a}_l^\dagger$ und $\hat{a}_l$ ausgedrückt werden. Im Folgenden arbeiten wir mit natürlichen Einheiten ($\hbar = c = 1$).

   (a) **(4 Punkte)** Zeigen Sie, dass die in (1) definierten Operatoren die Spin-Algebra erfüllen, d.h. dass $[\hat{S}_k^a, \hat{S}_l^b] = i\delta_{kl}\epsilon^{abc}\hat{S}_l^c,\ a, b, c \in \{x, y, z\}$.

   (b) **(4 Punkte)** Zeigen Sie, dass $\hat{H}$ bis zur zweiten Ordnung in $\hat{a}_l^\dagger$ and $\hat{a}_l$ wie folgt geschrieben werden kann:

$$\hat{H} = E_0 + JS \sum_{\langle k,l \rangle} \left[\left(\hat{a}_l^\dagger - \hat{a}_k^\dagger \right) \left(\hat{a}_l - \hat{a}_k \right) \right], \qquad E_0 = -\sum_{\langle k,l \rangle} JS^2\,.$$

   (c) **(5 Punkte)** Diagonalisieren Sie den Hamilton-Operator mit Hilfe der Fouriertransformation der Bose-Operatoren

$$\hat{a}_l^\dagger = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\vec{p}} e^{-i\,\vec{p}\cdot\vec{x}_l} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger, \qquad \hat{a}_l = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\vec{p}} e^{i\,\vec{p}\cdot\vec{x}_l} \hat{a}_{\vec{p}}\,,$$

wobei N die Anzahl der Gitterpunkte ist. Nutzen Sie dazu die Orthogonalitätsrelation

$$\frac{1}{N}\sum_l e^{i(\vec{p}-\vec{q})\cdot\vec{x}_l} = \delta_{\vec{p}\,\vec{q}}$$

und schreiben Sie die Summe über benachbarte Gitterpositionen wie folgt um:

$$\sum_{\langle l,k\rangle} f(\vec{x}_l,\vec{x}_k) = \frac{1}{2}\sum_l \sum_{\vec{\delta}} f(\vec{x}_l,\vec{x}_l+\vec{\delta}\,)\,,$$

wobei die Vektoren $\vec{\delta}$ zu den nächsten Nachbarn zeigen. Randeffekte können vernachlässigt werden.

(d) **(2 Punkte)** Die Operatoren $\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}$ und $\hat{a}_{\vec{p}}$ erzeugen bzw. vernichten Spinwellen mit Impuls $\vec{p}$. Diese werden auch als Magnonen bezeichnet. Bestimmen Sie die Dispersionsrelation der Magnonen.

2. **Elektromagnetismus** **(15 Punkte)**

In Lorentz-Heaviside-Einheiten mit $c = 1$ nehmen die Maxwell-Gleichungen die folgende Form an.

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho, \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \vec{j}, \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0, \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

Mithilfe eines anti-symmetrischen Tensors $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$ lassen sich diese explizit in Lorentz-kovarianter Form schreiben:

$$F^{i0} = E^i\,, \quad F^{ij} = -\sum_{k=1}^{3}\varepsilon^{ijk}B^k\,.$$

Benutzen Sie die Minkowski-Metrik $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$, $\mu,\nu \in \{0,1,2,3\}$.

(a) **(5 Punkte)** Zeigen Sie, dass

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu \quad \text{und} \quad \partial_{[\mu}F_{\rho\sigma]} = 0$$

die Maxwell-Gleichungen reproduzieren, wobei $J^\nu = (\rho,\vec{j}\,)$, $\partial_\mu = (\frac{\partial}{\partial t},\vec{\nabla})$, und $_{[\ldots]}$ die totale Antisymmetrisierung bezüglich der Indizes bezeichnet.

(b) **(5 Punkte)** Benutzen Sie die Transformationseigenschaften des Tensors $F^{\mu\nu}$ um zu zeigen, wie das elektrische Feld $\vec{E}$ unter Lorentz-Boosts entlang der x-Achse transformiert.

(c) **(5 Punkte)** Die elektromagnetische Viererkraft f^μ auf ein Teilchen mit Ladung e und Masse m ist gegeben durch

$$f^\mu = \frac{\mathrm{d}p^\mu}{\mathrm{d}\tau} = eF^\mu_{\ \nu}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}\,,$$

wobei τ die Eigenzeit ist und $p^\mu = (E,\vec{p}\,)$. Zeigen Sie, dass diese die Lorentzkraft

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = e\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right)$$

reproduziert. Was beschreibt die Null-Komponente der Gleichung?