Theoretische Physik 5
Höhere Quantenmechanik
Wintersemester 2018/2019
Übungsblatt 6

Dozent: Prof. Dr. Pedro Schwaller — Abgabe: 3.12.2018
Assistent: Eric Madge — 30 Punkte

Sie finden die Übungsblätter online unter `http://www.staff.uni-mainz.de/pschwal/index_1819.html`.
Abgabe bis Montag 3.12.2018 (12:30) im roten Briefkasten 42 (Foyer im Staudingerweg 7).

1. **Supraleiter** **(15 Punkte)**

   In der Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS)-Theorie der Supraleitung besteht der Grundzustand eines Supraleiters aus Cooper-Paaren und ist gegeben durch

   $$|\psi_0\rangle = \prod_{\vec{p}} \left(u_{\vec{p}} + v_{\vec{p}}\, \hat{a}^\dagger_{\vec{p},\uparrow} \hat{a}^\dagger_{-\vec{p},\downarrow} \right) |0\rangle \,,$$

   wobei $\hat{a}^\dagger_{\vec{p},\sigma}$ und $\hat{a}_{\vec{p},\sigma}$ fermionische Leiteroperatoren sind und $u_{\vec{p}},\ v_{\vec{p}}, \in \mathbb{C}$. Der Operator $\hat{a}^\dagger_{\vec{p},\uparrow}\hat{a}^\dagger_{-\vec{p},\downarrow}$ erzeugt ein Cooper-Paar aus zwei Elektronen mit entgegengesetztem Spin und Impuls $\vec{p}$, der Operator $\hat{a}_{-\vec{p},\downarrow}\hat{a}_{\vec{p},\uparrow}$ venichtet dieses.

   (a) **(7 Punkte)** Berechnen Sie die Norm $\langle\psi_0|\psi_0\rangle$ des Grundzustandes und zeigen Sie, dass dieser auf 1 normiert ist, wenn $|u_{\vec{p}}|^2 + |v_{\vec{p}}|^2 = 1$.

   (b) **(8 Punkte)** Berechnen Sie $\langle\psi_0|\hat{a}_{-\vec{p},\downarrow}\hat{a}_{\vec{p},\uparrow}|\psi_0\rangle$ und $\langle\psi_0|\hat{a}^\dagger_{\vec{p},\uparrow}\hat{a}^\dagger_{-\vec{p},\downarrow}|\psi_0\rangle$.

2. **Wigner-Kristall** **(15 Punkte)**

   Nach einer Vorhersage von Wigner[1] soll ein Elektronengas bei tiefen Temperaturen und hinreichend niedrigen Dichten einen Phasenübergang in eine kristalline Struktur (bcc) durchführen. Betrachten Sie zu einer qualitativen Analyse[2] die Energie eines Gitters von Elektronen in einem homogenen Hintergrund positiver Ladung. Nehmen Sie an, dass das Potential, in dem sich ein jedes Elektron bewegt, durch das Potential einer das Elektron umgebenden, homogenen, positiv geladenen Kugel mit Radius $r_0 = r_s a_0$ angenähert werden kann. Dabei ist r_0 der mittlere Teichenabstand im Wigner-Kristall mit der Elektrondichte n, d.h. $\frac{4\pi}{3} r_0^3 = 1/n$, und $a_0 = (me^2)^{-1}$ ist der bohrsche Radius. Dies führt auf ein Modell unabhängiger Elektronen (Einstein-Näherung) in einem Oszillator-Potential

   $$\hat{H} = \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m} + \frac{e^2}{2r_0^3}\hat{\vec{x}}^2 - \frac{3e^2}{2r_0} \,.$$

[1] E. P. Wigner. „On the Interaction of Electrons in Metals“. In: *Phys. Rev.* 46 (11 1934), S. 1002–1011. DOI: `10.1103/PhysRev.46.1002`.

[2] E. P. Wigner. „Effects of the electron interaction on the energy levels of electrons in metals“. In: *Trans. Faraday Soc.* 34 (1938), S. 678–685. DOI: `10.1039/TF9383400678`.

Bestimmen Sie die Nullpunktsenergie E_0 dieses dreidimensionalen harmonischen Oszillators und vergleichen Sie das so erhaltene Resultat mit dem aus der Literatur bekannten Resultat[3]

$$E_0 = \frac{e^2}{2a_0}\left(-\frac{1.792}{r_s} + \frac{2.638}{r_s^{3/2}}\right) .$$

Bestimmen Sie durch Minimierung der Nullpunktsenergie den mittleren Abstand der Elektronen.

[3] Rosemary A. Coldwell-Horsfall und Alexei A. Maradudin. „Zero-Point Energy of an Electron Lattice". In: *J. Math. Phys.* 1.5 (1960), S. 395–404. DOI: `10.1063/1.1703670`.