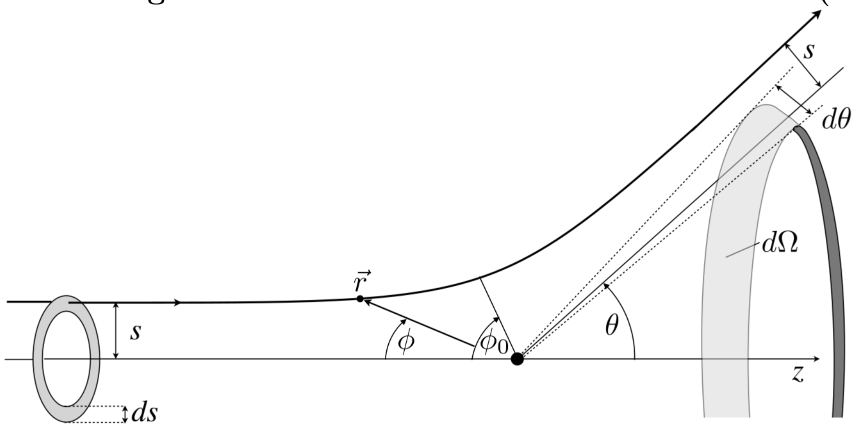
Theoretische Physik 5
Höhere Quantenmechanik
Wintersemester 2018/2019
Übungsblatt 7

Dozent: Prof. Dr. Pedro Schwaller — Abgabe: 10.12.2018
Assistent: Eric Madge — 30 Punkte

Sie finden die Übungsblätter online unter `http://www.staff.uni-mainz.de/pschwal/index_1819.html`.
Abgabe bis Montag 10.12.2018 (12:30) im roten Briefkasten 42 (Foyer im Staudingerweg 7).

1. **Rutherford-Streuung** **(10 Punkte)**



Um sich mit dem Begriff des differentiellen Wirkungsquerschnitts vertraut zu machen betrachten Sie in dieser Aufgabe einen klassischen Streuprozess: die Rutherford-Streuung. Bei diesem Streuexperiment werden Teilchen einer Sorte in einem homogenen Strahl entlang der z-Achse auf ein im Koordinatenursprung fixiertes Teilchen (einer beliebigen anderen Sorte) geschossen. Die beiden Teilchen wechselwirken dabei miteinander über ein repulsives Potential der Form

$$V(r) = \frac{\alpha}{r}\,, \qquad \text{wobei } \alpha > 0 \text{ und } r = |\vec{r}\,|\,,$$

so dass ein eingehendes Teilchen mit Abstand s zur z-Achse um den Streuwinkel θ abgelenkt wird. Für die Wechselwirkung gilt, dass $V(r \to \infty) = 0$. Daher können Sie annehmen, dass sich die einfallenden Teilchen mit zunehmendem Abstand vor und nach dem Streuprozess wechselwirkungsfrei bewegen. Ein Maß für die Verteilung nach dem Streuprozess ist der sogenannte differenzielle Wirkungsquerschnitt

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\text{Anzahl der gestreuten Teilchen pro Zeit und Raumwinkel}}{\text{Anzahl einfallender Teilchen pro Zeit und Fläche}}\,.$$

(a) **(3 Punkte)** Leiten Sie unter Berücksichtigung der Teilchenzahlerhaltung einen Zusammenhang zwischen eingehendem und ausgehendem Strahl her und bestimmen Sie daraus den differentiellen Wirkungsquerschnitt. Das Ergebnis lautet:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{s}{\sin\theta}\left|\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}\right|$$

Begründen Sie, warum man den Betrag der Ableitung bilden muss.

(b) **(7 Punkte)** Leiten Sie mit Hilfe von Energie- und Drehimpulserhaltung den berühmten Rutherfordschen Wirkungsquerschnitt

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \left(\frac{\alpha}{4E}\right)^2 \sin^{-4}\frac{\theta}{2},$$

her, wobei E die Energie eines jeden einfallenden Teilchens ist. Machen Sie sich dabei zunutze, dass wir einen klassischen Prozess betrachten und sich die einzelnen Teilchen daher auf vorgeschriebenen Bahnen bewegen.

2. **Zeitentwicklungsoperator** **(20 Punkte)**

Im Schrödingerbild sind die quantenmechanischen Zustände zeitabhängig. Befindet sich ein System zum Zeitpunkt t_0 im Zustand $|\psi, t_0\rangle$, so ist der entsprechende Zustand zum Zeitpunkt $t > t_0$ (falls im Zeitraum $[t_0, t]$ keine Messung durchgeführt wird) gegeben durch

$$|\psi, t\rangle = \hat{U}(t, t_0)|\psi, t_0\rangle\,,$$

wobei $\hat{U}(t, t_0)$ der sogenannte Zeitentwicklungsoperator ist.

(a) **(2 Punkte)** Zeigen Sie folgende Eigenschaften des Zeitentwicklungsoperators:

i. $\hat{U}(t_0, t_0) = 1$
ii. $\hat{U}(t, t_0) = \hat{U}(t, t')\hat{U}(t', t_0)$
iii. $\hat{U}^\dagger(t, t_0) = \hat{U}^{-1}(t, t_0)$
iv. $\hat{U}(t, t_0) = \hat{U}^{-1}(t_0, t)$

(b) **(4 Punkte)** Leiten Sie aus der Schrödingergleichung $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi, t\rangle = \hat{H}(t)|\psi, t\rangle$ mit explizit zeitabhängigem Hamiltonoperator eine Differenzialgleichung für den Zeitentwicklungsoperator her und zeigen Sie, dass diese zusammen mit der Anfangsbedingung (a) i. auf folgende Integralgleichung führt.

$$\hat{U}(t, t_0) = 1 + \frac{1}{i\hbar}\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t'\, \hat{H}(t')\hat{U}(t', t_0) \tag{1}$$

(c) **(5 Punkte)** Zeigen Sie, dass (1) durch Iteration auf die von Neumann'sche Reihe führt:

$$\hat{U}(t, t_0) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{U}^{(n)}(t, t_0)\,,$$

$$\hat{U}^{(n)}(t, t_0) = \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_1 \underbrace{\int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t_2 \ldots \int_{t_0}^{t_{n-1}}}_{(t\geq t_1\geq t_2\geq \ldots t_n\geq t_0)} \mathrm{d}t_n\, \hat{H}(t_1)\hat{H}(t_2)\cdots\hat{H}(t_n)\,.$$

Beachten Sie, dass zeitabhängige Hamiltonoperatoren zu verschiedenen Zeitpunkten nicht notwendigerweise kommutieren.

(d) **(3 Punkte)** Wir führen nun den Dyson'schen Zeitordnungsoperator ein,

$$T\left[\hat{A}(t_1)\hat{B}(t_2)\right] = \begin{cases} \hat{A}(t_1)\hat{B}(t_2) & \text{für } t_1 > t_2\,, \\ \hat{B}(t_2)\hat{A}(t_1) & \text{für } t_2 > t_1\,. \end{cases} \tag{2}$$

Zeigen Sie, dass

$$\int\limits_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_1 \int\limits_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t_2\, \hat{H}(t_1)\hat{H}(t_2) = \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_1 \int\limits_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_2\, T\left[\hat{H}(t_1)\hat{H}(t_2)\right]\,.$$

(e) **(5 Punkte)** Mit der ensprechenden Verallgemeinerung von (2) auf N Operatoren erhält man

$$\int\limits_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_1 \int\limits_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t_2 \cdots \int\limits_{t_0}^{t_{N-1}} \mathrm{d}t_N\, \hat{H}(t_1)\cdots\hat{H}(t_N)$$
$$= \frac{1}{N!}\int\limits_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_1 \cdots \int\limits_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_N\, T\left[\hat{H}(t_1)\cdots\hat{H}(t_N)\right]\,.$$

Zeigen Sie, dass sich der Zeitentwickungsoperator somit in der folgenden, kompakten Form schreiben lässt.

$$\hat{U}(t,t_0) = T\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int\limits_{t_0}^{t} \mathrm{d}t'\, \hat{H}(t')\right)$$

(f) **(1 Punkt)** Wie sieht der Zeitentwicklungsoperator für die Spezialfälle eines zeitunabhängigen Hamiltonoperators und eines Hamiltonoperators mit $[\hat{H}(t), \hat{H}(t')] = 0$ aus?