Theoretische Physik 5

Höhere Quantenmechanik

Wintersemester 2018/2019

Übungsblatt 8

Dozent:	Prof. Dr. Pedro Schwaller	Abgabe: 17.12.2018
Assistent:	Eric Madge	30 Punkte

Sie finden die Übungsblätter online unter `http://www.staff.uni-mainz.de/pschwal/index_1819.html`.
Abgabe bis Montag 17.12.2018 (12:30) im roten Briefkasten 42 (Foyer im Staudingerweg 7).

1. **Natürliche Einheiten** **(12 Punkte)**

In der Teilchenphysik ist es üblich, in sogenannten natürlichen Einheiten zu arbeiten, in denen die Naturkonstanten Lichtgeschwindigkeit c, reduziertes Plancksches Wirkungsquantum $\hbar$ und Boltzmann-Konstante k_B auf eins gesetzt werden.

$$c = 1 \qquad \hbar = 1 \qquad k_B = 1$$

Mit dieser Konvention können alle Größen in Potenzen von Energieeinheiten angegeben werden. Die Masse eines Teilchens ist beispielsweise nach Einstein mit der entsprechenden Ruheenergie über die Formel $E = mc^2$ verbunden. Für $c = 1$ erhalten wir $E = m$, d.h. in natürlichen Einheiten hat die Masse die Dimension einer Energie.[1] Als fundamentale Einheit für die Energie wird in der Regel das Gigaelektronenvolt (GeV) verwendet. Die Energiedimension physikalischer Größen und die entsprechenden Umrechnungsfaktoren lassen sich eindeutig aus den SI-Einheiten und Werten von c, $\hbar$ und k_B, oder aus Gleichungen, welche die Einheiten verschiedener Größen miteinander verbinden (wie z.B. $E = mc^2$), herleiten.

(a) **(2 Punkte)** Was ist ein $1\,\mathrm{GeV}$ in Joule? Wie sehen c, $\hbar$ und k_B in SI-Einheiten aus? Mit welcher Präzision kennen wir den Wert der Lichtgeschwindigkeit? Warum?

(b) **(3 Punkte)** Hat eine Größe Q die Energiedimension E^n, so schreibt man dies als $[Q] = n$. Für die Masse erhalten wir beispielsweise $[m] = 1$, da $m \sim E^1$, eine dimensionlose Größe wie die Lichtgeschwindigkeit hat $[c] = 0$ da $c = 1 \sim E^0$. Betrachten Sie die folgenden (Un-)Gleichungen

$$E^2 = m^2c^4 + p^2c^2 \qquad \Delta E\,\Delta t \geq \frac{\hbar}{2} \qquad E_\gamma = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda}$$

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2 \qquad \langle E_{\text{kin}}\rangle = \frac{3}{2}k_BT$$

und leiten Sie daraus die Energiedimensionen der folgenden Größen ab.

[1] Selbstverständlich könnte man genauso gut jede andere Größe als Grundgröße verwenden und beispielsweise Energie in Einheiten der Masse angeben.

i. Zeit
ii. Länge
iii. Temperatur
iv. Masse
v. Geschwindigkeit
vi. Impuls

(c) **(4 Punkte)** Zum Vergleich mit experimentellen Daten müssen natürliche Einheiten oft in SI-Einheiten umgerechnet werden. Was sind die SI Einheiten der Größen aus Aufgabenteil (b) i. bis vi.? Welche natürlichen Einheiten (in GeV) haben die Größen? Leiten Sie die entsprechenden Umrechnungsfaktoren (von SI in natürliche Einheiten und umgekehrt) aus den Werten von c, $\hbar$ und k_B in SI-Einheiten her.

(d) **(3 Punkte)** Betrachten Sie die Ortsraum-Schrödingergleichung für ein Elektron in einem elektromagnetischen Feld.

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{x},t) = \left[\frac{1}{2m_e}\left(-i\hbar\nabla + \frac{e}{c}\vec{A}(\vec{x},t)\right)^2 - e\phi(\vec{x},t)\right]\psi(\vec{x},t)\,.$$

$\vec{A}$ und ϕ sind das Vektor- und Skalarpotential der elektromagnetischen Felder und ψ ist die (normierte) Wellenfunktion des Elektrons.

i. Wie sieht die Gleichung in natürlichen Einheiten aus?
ii. Die Elementarladung e sei dimensionslos. Leiten Sie die Energiedimensionen der Potentiale ϕ und $\vec{A}$ her.
iii. Welche Energiedimension hat die Wellenfunktion ψ des Elektrons?

2. **Lorentzinvariantes Integrationsmaß** **(6 Punkte)**

(a) **(3 Punkte)** Zeigen Sie, dass das Integrationsmaß

$$\frac{\mathrm{d}^3p}{2E} \qquad \text{mit} \qquad E = \sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^2}$$

invariant unter Boosts entlang der z-Achse ist.

(b) **(3 Punkte)** Das Integrationsmaß $\mathrm{d}^4p\,\delta(p^2 - m^2)\Theta(p^0)$ ist manifest invariant unter eigentlichen orthochronen Lorentztransformationen ($\Lambda^0{}_0 > 0$, $\det\Lambda = 1$). Zeigen Sie, dass sich dieses in das Integrationsmaß aus Aufgabenteil (a) umschreiben lässt.

3. **Das optische Theorem** **(12 Punkte)**

Die S-Matrix (Streumatrix) beschreibt den Übergang von einem asymptotischen (freien) Anfangszustand $|i\rangle$ bei $t \to -\infty$ in einen (ebenfalls freien) asymptotischen Endzustand $|f\rangle$ bei $t \to +\infty$, d.h.

$$|\psi, t = +\infty\rangle = \hat{S}|\psi, t = -\infty\rangle\,.$$

Die entsprechenden Matrixelemente $\mathcal{A}(i \to f)$ sind definiert durch

$$\langle f|\hat{\mathcal{T}}|i\rangle = (2\pi)^4\delta^4(p_i - p_f)\mathcal{A}(i \to f)\,.$$

Die Transfermatrix[2] $\mathcal{T}$ ist dabei der nicht-triviale Teil der S-Matrix, $\hat{S} = 1 + i\hat{\mathcal{T}}$.

[2]Beachten Sie, dass $\hat{\mathcal{T}} = (2\pi)^4\delta^4(p_i - p_f)\hat{T}$ im Vergleich zum in der Vorlesung definierten $\hat{T}$-Operator.

(a) **(1 Punkt)** Zeigen Sie, dass die S-Matrix unitär sein muss, damit die Wahrscheinlichkeit erhalten bleibt, und dass dies zur folgenden Bedingung für die Transfermatrix $\mathcal{T}$ führt:

$$i\left(\hat{\mathcal{T}}^\dagger - \hat{\mathcal{T}}\right) = \hat{\mathcal{T}}^\dagger \hat{\mathcal{T}}$$

(b) **(5 Punkte)** Leiten Sie dass verallgemeinerte optische Theorem

$$\mathcal{A}(i \to f) - \mathcal{A}^*(f \to i) = i \sum_X \int \mathrm{d}\Pi_X (2\pi)^4 \delta^4(p_i - p_X) \mathcal{A}(i \to X) \mathcal{A}^*(f \to X)$$

her. Nutzen Sie dazu die Vollständigkeitsrelation

$$1 = \sum_X \int \mathrm{d}\Pi_X \, |X\rangle\langle X| \,,$$

wobei die Summe über alle N-Teilchenzustände geht und über den entsprechenden lorentzinvarianten Phasenraum integriert wird, d.h.

$$\mathrm{d}\Pi_X \equiv \prod_{j\in X} \frac{\mathrm{d}^3 p_j}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_j} \,.$$

(c) **(3 Punkte)** Betrachten Sie nun den Spezialfall $|i\rangle = |f\rangle = |A\rangle$ mit einem Einteilchenzustand $|A\rangle$ und setzen Sie den Imaginärteil des Propagators $\mathcal{A}(A \to A)$ mit der totalen Zerfallsbreite Γ_{tot} des Zustands $|A\rangle$ in Verbindung. Letztere ist definiert als die Summe aller partiellen Zerfallsbreiten in die Zustände $|X\rangle$, welche widerum gegeben sind durch

$$\Gamma(A \to X) = \frac{1}{2m_A} \int \mathrm{d}\Pi_X \, (2\pi)^4 \delta^4(p_A - p_X) |\mathcal{A}(A \to X)|^2 \,,$$

wobei m_A die Masse des Teilchens ist.

(d) **(3 Punkte)** Sei nun $|A\rangle$ $(= |i\rangle = |f\rangle)$ ein Zweiteilchenzustand. Leiten Sie die entsprechende Beziehung zwischen dem Imaginärteil der Amplitude für Vorwärtssreuung $\mathcal{A}(A \to A)$ und dem totalen Streuungswirkungsquerschnitt $\sum_X \sigma(A \to X)$ her, wobei

$$\sigma(A \to X) = \frac{1}{4E_{\text{CM}}|\vec{p}_{\text{CM}}|} \int \mathrm{d}\Pi_X \, (2\pi)^4 \delta^4(p_A - p_X) |\mathcal{A}(A \to X)|^2 \,.$$

E_{CM} ist die Schwerpunktsenergie der beiden Teilchen und $|\vec{p}_{\text{CM}}|$ ist der Betrag ihrer Impulse im Schwerpunktssystem. Die hier hergeleitete Beziehung wird oft als "optisches Theorem" bezeichnet.