Theoretische Physik 5
Höhere Quantenmechanik
Wintersemester 2018/2019
Übungsblatt 9

Dozent:	Prof. Dr. Pedro Schwaller	Abgabe: 7.1.2019
Assistent:	Eric Madge	40 Punkte

Sie finden die Übungsblätter online unter `http://www.staff.uni-mainz.de/pschwal/index_1819.html`.
Abgabe bis Montag 7.1.2019 (12:30) im roten Briefkasten 42 (Foyer im Staudingerweg 7).

1. **Verständnisfragen** **(3 Punkte)**
   (a) **(1 Punkt)** Was ist der Fock-Raum und wie wird dieser konstruiert?
   (b) **(1 Punkt)** Erläutern Sie den Begriff des Feldoperators. Welche Vertauschungsrelationen erfüllt dieser im fermionischen bzw. im bosonischen Fall?
   (c) **(1 Punkt)** Warum schlägt die Interpretation der Klein-Gordon-Gleichung als quantenmechanische Ein-Teilchen-Theorie fehl?

In der (Quanten-)Feldtheorie wird häufig im Lagrangeformalismus gearbeitet. Dieser bietet den Vorteil, dass er sich in manifest lorentzinvarianter Form schreiben lässt. In Feldtheorien ist die Lagrangefunktion L durch das räumliche Integral der Lagrangedichte $\mathcal{L}$ gegeben, $L = \int \mathrm{d}^3x\, \mathcal{L}$, welche ihrerseits ein Funktional der Felder oder Feldoperatoren und deren Ableitungen ist.

2. **Euler-Lagrange-Gleichungen** **(5 Punkte)**
   Die Wirkung S ist definiert als das Zeitintegral der Lagrangefunktion,

$$S = \int \mathrm{d}t\, L = \int \mathrm{d}^4x\, \mathcal{L}\,.$$

   Das Prinzip der stationären Wirkung besagt, dass die Felder, von denen die Wirkung abhängt, eine Konfiguration einnehmen, in der die Wirkung stationär ist. Das heißt, die Wirkung muss invariant ($\delta S = 0$) unter Feldvariationen der Form $\phi \to \phi + \delta\phi$ sein, wobei $\delta\phi$ ein beliebiges Feld ist. Betrachten Sie den Fall, dass die Lagrangedichte ein Funktional von nur einem einzelnen Feld ϕ und dessen Ableitung ist, $\mathcal{L} = \mathcal{L}[\phi, \partial_\mu\phi]$, und zeigen Sie, dass die Forderung $\delta S = 0$ auf die folgende Bewegungsgleichung für ϕ führt:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} = 0\,.$$

   Sie können annehmen, dass Randterme verschwinden.

3. **Einige Euler-Lagrange-Gleichungen** **(14 Punkte)**

Geben Sie für jede der folgenden Lagrangedichten die zugehörigen Feldgleichungen an.

Hinweis: $\frac{\partial X^\mu}{\partial X^\nu} = \delta^\mu_\nu$ und $X_\mu X^\mu = \eta_{\mu\nu} X^\mu X^\nu$

(a) **(3 Punkte)**

$$\mathcal{L}_{\phi^4} = \frac{1}{2}\Big(\partial_\mu \phi(x)\Big)\Big(\partial^\mu \phi(x)\Big) - \frac{m^2}{2}\,\phi(x)^2 - \frac{\lambda}{4!}\,\phi(x)^4$$

für $\phi(x) \in \mathbb{R}\,,\ m > 0\,,\ \lambda > 0\,.$

(b) **(3 Punkte)**

$$\mathcal{L}_{\phi^3} = \Big(\partial_\mu \phi_a(x)\Big)\Big(\partial^\mu \phi^a(x)\Big) - \phi_a(x) M^{ab} \phi_b(x) - g\Gamma^{abc}\phi_a(x)\phi_b(x)\phi_c(x)$$

für $\phi_a(x) \in \mathbb{R}$, $1 \le a \le N$, M und Γ jeweils reell und symmetrisch.

(c) **(3 Punkte)**

$$\mathcal{L}_{\text{em}} = -\frac{1}{4}\Big(\partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x)\Big)\Big(\partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x)\Big)$$

für $A_\mu(x) \in \mathbb{R}\,.$

(d) **(5 Punkte)**

$$\mathcal{L}_{\text{sem}} = \mathcal{L}_{\text{em}} + \Big(\partial_\mu \phi(x) + ieA_\mu(x)\phi(x)\Big)^* \Big(\partial^\mu \phi(x) + ieA^\mu(x)\phi(x)\Big)$$

für $\phi(x) \in \mathbb{C}\,,\ A_\mu(x) \in \mathbb{R}\,,\ e > 0\,.$

4. **Maxwellgleichungen** **(4 Punkte)**

Der Feldstärketensor $F^{\mu\nu}$ ist definiert als $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$.

(a) **(2 Punkte)** Zeigen Sie, dass sich die in 3. (d) hergeleitete Bewegungsgleichung für A^μ in der Form $\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$ schreiben lässt. Wie muss dazu die Viererstromdichte j^μ definiert werden?

(b) **(2 Punkte)** Zeigen Sie, dass der Feldstärketensor die Bianchiidentität $\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0$ erfüllt. Zeigen Sie weiterhin, dass dies zur Maxwellgleichung $\partial_{[\mu} F_{\nu\lambda]} = 0$ führt.

5. **Hamiltondichte** **(14 Punkte)**

In Feldtheorien ist die Hamiltonfunktion durch das räumliche Integral der entsprechenden Hamiltondichte $\mathcal{H}$ gegeben, $H = \int \mathrm{d}^3x\,\mathcal{H}$. Letztere ist ein Funktional der Felder ϕ und der zugehörigen konjugierten Impulse π und hängt mit der Lagrangedichte über eine Legendretransformation zusammen:

$$\mathcal{H}[\phi,\pi] = \pi\,\dot\phi[\phi,\pi] - \mathcal{L}[\phi,\,\dot\phi[\phi,\pi]]\,, \qquad \pi = \frac{\partial \mathcal{L}[\phi,\dot\phi]}{\partial\dot\phi}\,.$$

Bestimmen Sie für die Lagrangedichten aus Aufgabe 3 die zugehörigen Hamitlondichten.

Hinweis: ϕ steht hier für ein allgemeines Feld und kann auch Indizes tragen (z.B. ϕ_a oder A_μ). Der zugehörige konjugierte Impuls trägt dann die selben Indizes.