

Übungen zur Vorlesung "Mathematische Rechenmethoden 1"**Blatt 10**

Abgabe bis spätestens Montag, 2. Juli, vor 15:00 per Einwurf in den roten Kasten Nr. 34 im Erdgeschoss des Physik-Gebäudes (Staudingerweg 7).

Aufgabe 34) Nachlese: Mehrdimensionale Integration (6 Punkte)

Das sogenannte Trägheitsmoment eines Körpers der Dichte ρ um die z -Achse ist gegeben durch die Gleichung

$$\theta = \rho \int \int dV (x^2 + y^2),$$

wobei natürlich nur über das Volumen des Körpers integriert wird.

- (a) Berechnen Sie das Trägheitsmoment eines Zylinders der Länge L und des Radius R , der in z -Richtung orientiert ist.
- (b) Berechnen Sie das Trägheitsmoment einer Kugel des Radius R .

Hinweis: Verwenden Sie in beiden Fällen Zylinderkoordinaten.

Aufgabe 35) Separable Differentialgleichungen (6 Punkte)

Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen

- (a) $y'(x) = a x y(x) + b y(x)$ mit $y(0) = 1$
- (b) $y'(x) = \cos(x)/\sin(x)$ und $y'(x) = \cos(y)/\sin(y)$
- (c) $xy'(x) = C y^n$ für $n > 1$. Welches ist der Definitionsbereich von x ?

Aufgabe 36) Lineare Differentialgleichungen (4 Punkte)

Bestimmen Sie

- (a) Die allgemeine Lösung der Gleichung $y'(x) = -y(x)/x$ (inklusive aller relevanten Integrationskonstanten).
- (b) Die Lösung von $y'(x) = -y(x)/x + \exp(-x^2)$ für $x \geq 1$ mit $y(1) = 0$.

Aufgabe 37) Wachstum von Bakterien in Petrischale (4 Punkte)

In einer Petrischale befinden sich zur Zeit $t = 0$ zehn Bakterien. In einer optimalen Nährlösung teilen sie sich jede Stunde.

- (a) Stellen Sie die Differentialgleichung auf, die das unbegrenzte Wachstum beschreibt, und lösen Sie diese.
- (b) Bei Nahrungsmangel verlangsamt sich das Wachstum oder stoppt gar ganz. Dieser Effekt kann in der Differentialgleichung durch einen Zusatzterm berücksichtigt werden. Die neue Differentialgleichung lautet dann $\dot{N} = \alpha N(t) - \gamma N^2(t)$ wobei $N(t)$ die Anzahl der Bakterien zur Zeit t ist. Lösen Sie diese neue Differentialgleichung.