

Übungen zur Vorlesung "Mathematische Rechenmethoden 1"
Blatt 2

Abgabe bis spätestens Montag, 7. Mai, vor 8:00 morgens per Einwurf in den roten Kasten Nr. 34 im Erdgeschoss des Physik-Gebäudes (Staudingerweg 7).

Aufgabe 6) Funktionen (6 Punkte)

- a) Zeigen Sie: ${}_b \log e = 1/\ln(b)$
- b) Berechnen Sie ${}_b \log b$.
- c) Zeigen Sie: $\sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = \frac{1}{2}(\sin x + \sin y)$
- d) Zeigen Sie: $\operatorname{arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$
- e) Zeigen Sie: $\sqrt{10 + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60}} = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ (nach Bhaskara II, 1114-1185)
- f) Zeigen Sie: $\sqrt[3]{\sqrt{2} - 1} = \sqrt[3]{1/9} - \sqrt[3]{2/9} + \sqrt[3]{4/9}$ (nach Ramanujan, 1887-1920)

Aufgabe 7) Grenzwerte (8 Punkte)

Berechnen Sie folgende Grenzwerte

- a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax + 1}{bx^2 - 1}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$
- b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^2}{1 - x}$
- c) $\lim_{x \rightarrow \infty} 2^{-x}(\sin x)^n$
- d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x) - \exp(2x + 1)}{(x - 1)^2}$
- e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$
- f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x}$
- g) $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} x \ln(x)$ (Hinweis: geht z.B. über die Regel von l'Hospital)
- h) $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} x^x$

Aufgabe 8) (6 Punkte)

Diskutieren Sie folgende "Beweise": Wo steckt der Wurm?

(a) Beweis von: $1 = 0$

$$\begin{aligned} \text{Sei } x &= 1 \\ \Rightarrow x^2 &= x \\ \Rightarrow x^2 - 1 &= x - 1 \\ \Rightarrow (x - 1)(x + 1) &= x - 1 \\ \Rightarrow (x + 1) &= 1 \\ \Rightarrow x &= 0 \checkmark \end{aligned}$$

(b) Beweis von: $4 = 5$

$$\begin{aligned} 16 - 36 &= 25 - 45 \\ \Rightarrow 16 - 36 + \frac{81}{4} &= 25 - 45 + \frac{81}{4} \\ \Rightarrow 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot \frac{9}{2} + \left(\frac{9}{2}\right)^2 &= 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot \frac{9}{2} + \left(\frac{9}{2}\right)^2 \\ \Rightarrow \left(4 - \frac{9}{2}\right)^2 &= \left(5 - \frac{9}{2}\right)^2 \\ \Rightarrow \left(4 - \frac{9}{2}\right) &= \left(5 - \frac{9}{2}\right) \\ \Rightarrow 4 &= 5 \checkmark \end{aligned}$$

(c) Beweis von: $2 > 3$

$$\begin{aligned} 1/4 &> 1/8 \\ \Rightarrow (1/2)^2 &> (1/2)^3 \\ \Rightarrow \ln(1/2)^2 &> \ln(1/2)^3 \\ \Rightarrow 2 \ln(1/2) &> 3 \ln(1/2) \\ \Rightarrow 2 &> 3 \checkmark \end{aligned}$$