

Übungen zur Vorlesung "Mathematische Rechenmethoden 1"

Blatt 4

Abgabe bis spätestens Montag, 21. Mai, vor 15:00 per Einwurf in den roten Kasten Nr. 34 im Erdgeschoss des Physik-Gebäudes (Staudingerweg 7).

Aufgabe 12) Komplexe Zahlen (Nachlese) (4 Punkte)

- (a) Zeigen Sie $|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|$
- (b) Beweisen Sie die Dreiecksungleichung $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.
(Hinweis: Am besten geht das anhand der Polardarstellung von z_1, z_2)
- (a) Berechnen Sie $\ln(2i)$
- (b) Berechnen Sie $\cos(\pi + i\pi)$

Aufgabe 13) Vektoren (8 Punkte)

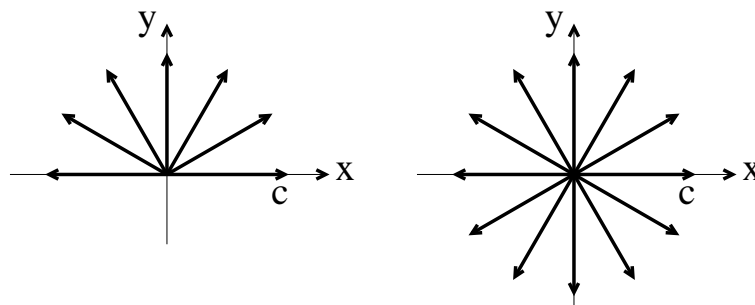
Gegeben seien folgende Vektoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{e} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

- (a) Betrachten Sie alle möglichen Paare von Vektoren (z.B. $(\vec{a}, \vec{b}), (\vec{a}, \vec{c})$ etc.). Welche Paare sind linear unabhängig, welche linear abhängig?
- (b) Sind die drei Vektoren $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ linear unabhängig? Wie ist es mit den Vektoren $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d})$?
- (c) Berechnen Sie den Winkel zwischen \vec{a} und \vec{d}
- (d) Berechnen Sie $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d})$.
- (e) Berechnen Sie die Fläche des Parallelogramms zwischen \vec{a} und \vec{c} .
- (f) Normieren Sie \vec{a} und \vec{d} auf die Länge 1.

Betrachten Sie für die letzten beiden Teilaufgaben planare Vektoren in der Ebene.

- (g) Bilden Sie die Summe von 7 Vektoren der Länge c mit der Winkeldifferenz $\pi/6$ (siehe Bild).
- (h) Bilden Sie allgemein die Summe von $2n$ Vektoren der Länge c mit der Winkeldifferenz π/n (Bild zeigt das Beispiel $n = 6$).



Aufgabe 14) Reziproke Vektoren (8 Punkte)

Für linear unabhängige Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ kann man sogenannte reziproke Vektoren definieren:

$$\vec{b}_1 = \frac{\vec{a}_2 \times \vec{a}_3}{V}, \quad \vec{b}_2 = \frac{\vec{a}_3 \times \vec{a}_1}{V}, \quad \vec{b}_3 = \frac{\vec{a}_1 \times \vec{a}_2}{V},$$

mit $V = \vec{a}_1 \cdot (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3)$. Reziproke Vektoren spielen in der Festkörperphysik und der Kristallographie eine wichtige Rolle.

- (a) Zeigen Sie, dass die drei Vektoren \vec{b}_1, \vec{b}_2 und \vec{b}_3 auch linear unabhängig sind.
- (b) Zeigen Sie $\vec{b}_i \cdot \vec{a}_j = \delta_{ij}$.
- (c) Betrachten Sie nun die reziproken Vektoren von $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$. Zeigen Sie, dass sie wieder proportional sind zu $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$.
(Sie können dazu die Vektoren entweder ausrechnen oder die Behauptung mit Argumenten beweisen, aber bitte **nachvollziehbare** Argumente).
- (d) Berechnen Sie die reziproken Vektoren für

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$