Institut für Physik SS 2018

Friederike Schmid

Übungen zur Vorlesung "Mathematische Rechenmethoden 1"
Blatt 5

Abgabe bis spätestens Montag, 28. Mai, *vor* 15:00 per Einwurf in den roten Kasten Nr. 34 im Erdgeschoss des Physik-Gebäudes (Staudingerweg 7).

Aufgabe 16) Komplexe Zahlen (Nachlese II) (6 Punkte)

(a) Zeichnen Sie in der Gaußschen Zahlengerade die Menge der Zahlen mit
- $z^4 = i$
- $z^4 = \sqrt{1+i}$ (Achtung: Wie in der Vorlesung besprochen, steht $\sqrt{1+i}$ für mehr als eine komplexe Zahl!)

(b) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung $\cos(z) = 2$

(c) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung $z^i = 1$.

Aufgabe 17) Epsilon-Tensor (6 Punkte)

(a) Beweisen Sie $\sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 6$

(b) Beweisen Sie mit Hilfe des Epsilon-Tensors die Gleichung
$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$

(c) Beweisen Sie mit Hilfe des Epsilon-Tensors die Gleichung
$(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{c}\vec{d}\vec{a})\vec{b} - (\vec{c}\vec{d}\vec{b})\vec{a} = (\vec{a}\vec{b}\vec{d})\vec{c} - (\vec{a}\vec{b}\vec{c})\vec{d}$
Hier steht $((\vec{a}\vec{b}\vec{c}) := \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} a_i b_j c_k$ für das Spatprodukt.

Aufgabe 18) Drehmatrizen (8 Punkte)

Drehungen lassen sich durch Drehmatrizen ausführen. Bei Drehung des Koordinatensystems entlang der z-Achse um den Winkel φ werden die Koordinaten $x = (x_i)$ eines Vektor $\vec{x}$ in die Koordinaten $x' = D(\varphi)x$ überführt, wobei die Drehmatrix $D(\varphi)$ gegeben ist durch

$$D(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi(& 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Betrachten Sie eine solche Drehung des Koordinatensystems um den Winkel $\varphi = \pi/2$. Wie ändern sich die Koordinaten der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ mit den ursprünglichen Koordinaten $a = (1, 0, 0)$, $b = (1, 2, 3)$, und $c = (0, 0, 1)$?

(b) Zeigen Sie, dass zwei hintereinander ausgeführte Drehungen um φ das gleiche Ergebnis geben wie eine Drehung um 2φ, d.h. $D(\varphi)D(\varphi) = D(2\varphi)$.

(c) Geben Sie die inverse Matrix zu $D(\varphi)$ an, d.h. die Matrix $D'(\varphi)$, für die gilt $D'(\varphi)D(\varphi) = \mathbb{1}$.
Berechnen Sie $D(\varphi)D'(\varphi)$.
Hinweis: Für diese Aufgabe sollte keine explizite Rechnung nötig sein.

(d) Betrachten Sie nun eine Situation, in der nicht das Koordinatensystem gedreht wird, aber ein Vektor $\vec{a}$ selber. Überlegen Sie sich, wie sich in diesem Fall die Koordinaten des Vektors transformieren. Begründen Sie Ihre Antwort.