Institut für Physik

Friederike Schmid

SS 2018

Übungen zur Vorlesung "Mathematische Rechenmethoden 1"

Blatt 6

Abgabe bis spätestens Montag, 4. Juni, *vor* 15:00 per Einwurf in den roten Kasten Nr. 34 im Erdgeschoss des Physik-Gebäudes (Staudingerweg 7).

Aufgabe 19) Matrizen (8 Punkte)

(a) Gegeben seien die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Berechnen Sie $AB, BA, Aa, a^T B, \mathrm{Sp}(A), \mathrm{Sp}(AB)$.

(b) Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie die Inverse A^{-1}. Testen Sie explizit $A^{-1}A = \mathbb{1}$.

Aufgabe 20) Spezielle Matrizen (6 Punkte)

(a) Gegeben seien die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

und die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}$.

Zeigen Sie $A\vec{b} = \vec{a} \times \vec{b}$.

Ist A invertierbar? (Hinweis: Berechnen Sie $\det(A)$).

(b) Drehmatrizen zur Beschreibung der Drehung von einem Koordinatensystem mit Basisvektoren $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ in ein neues Koordinatensystem mit neuen Basisvektoren $\{\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}'\}$ kann man laut Vorlesung durch Drehmatrizen $\mathcal{D}_{ij} = (\vec{e}_i{}' \cdot \vec{e}_j)$ beschreiben. Der Eintrag $\mathcal{D}_{ij}$ entspricht also der $j$ten Koordinate des neuen Basisvektors $\vec{e}_i{}'$ im alten Koordinatensystem $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.

Benutzen Sie diese Erkenntnis, um zu zeigen, dass Drehmatrizen die Relation $\mathcal{D}\mathcal{D}^T = 1$ erfüllen. Was folgt daraus für $\det(D)$?

Tipp: Machen Sie sich zuerst klar (und begründen Sie), dass $\vec{e}_i{}' = \sum_j \vec{e}_j \mathcal{D}_{ij}$.

Aufgabe 21) **Determinanten** (8 Punkte)

(a) Berechnen Sie die Determinante $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

(b) Berechnen Sie die Determinante $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

(c) Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie zuerst AA^T und $|\det(A)|$.

(d) Zeigen Sie: Für das Inverse A^{-1} einer Matrix gilt $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$.