Institut für Physik SS 2018

Friederike Schmid

Übungen zur Vorlesung "Mathematische Rechenmethoden 1"
Blatt 7

Abgabe bis spätestens Montag, 11. Juni, *vor* 15:00 per Einwurf in den roten Kasten Nr. 34 im Erdgeschoss des Physik-Gebäudes (Staudingerweg 7).

Aufgabe 22) Nachlese: Matrizen (8 Punkte)

- In der Quantenmechanik sind die Pauli-Matrizen
$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ von großer Bedeutung:

(a) Zeigen Sie $\sigma_i\sigma_j - \sigma_j\sigma_i = 2i\sum_{k=1}^{3}\epsilon_{ijk}\sigma_k$ für alle i, j.

(b) Berechnen Sie $\sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i$ für alle i, j.

(c) Zeigen Sie, dass der Satz von Matrizen $(\mathbb{1}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ linear unabhängig ist.

Aufgabe 23) Ableitungen (4 Punkte)

Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen nach x:

(a) $f(x) = \ln(x)\ \ln(\ln(x)) - \ln(x)$

(b) $f(x) = x^x$

(c) $f(x) = {}_b\log(x)$

(d) $f(x) = (\frac{\sin(x/a)}{x/a})^2$

Aufgabe 24) Partielle Ableitungen und Totales Differential (4 Punkte)

Berechnen Sie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ und das totale Differential der

(a) $f(x, y) = x\mathrm{e}^{xy^2}$

(b) $f(x, y) = 1/\sqrt{x^2 + y^2}$

Aufgabe 25) **Partielle Ableitungen II** (4 Punkte)

Betrachten Sie die Funktion $f(x,y) = xy(x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$.

(a) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$.
Sie erhalten $f_x(x,y) := \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{(x^2+y^2)^2}(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)$ und $f_y(x,y) := \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{(x^2+y^2)^2}(x^4 - 4x^2y^2 - y^4)$.

(b) Berechnen Sie $f_{yx} = \frac{\partial f_x}{\partial y}$ und $f_{xy} = \frac{\partial f_y}{\partial x}$ für $(x,y) \neq (0,0)$ und überzeugen Sie sich davon, dass das Ergebnis gleich ist ($f_{xy} = f_{yx}$).

(c) Betrachten Sie nun den Punkt $(x,y) = (0,0)$.
Berechnen Sie speziell
(i) $\frac{\partial f_x(0,y)}{\partial y}$ im Grenzfall $y \to 0$.
(ii) $\frac{\partial f_y(x,0)}{\partial x}$ im Grenzfall $x \to 0$.
Vergleichen Sie die Lösung von (i) und (ii) miteinander.

(d) Schauen Sie sich - z. B. auf der Wolfram alpha Seite (`www.wolframalpha.com`), den dreidimensionalen Verlauf der Funktionen $f(x,y)$ und f_{xy} im Intervall $x \in [-1,1], y \in [-1,1]$ an. Der Befehl z.B. zum Plotten von $f(x,y)$ lautet

```
Plot3D[x y (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2), {x, -1, 1}, {y, -1, 1}]
```

Was beobachten Sie?