

Übungen zur Vorlesung "Mathematische Rechenmethoden 1"**Blatt 9**

Abgabe bis spätestens Montag, 25. Juni, vor 15:00 per Einwurf in den roten Kasten Nr. 34 im Erdgeschoss des Physik-Gebäudes (Staudingerweg 7).

Aufgabe 30) Stammfunktionen (4 Punkte)

Bestimmen Sie die Stammfunktionen folgender Funktionen:
(Angabe der Lösung reicht, Zwischenschritte nicht nötig.)

(a) $f(x) = -1/\sqrt{1-x^2}$

(b) $f(x) = \sinh(x)$

(c) $f(x) = 2^x$

(d) $f(x) = \sin(x) e^{\cos(x)}$

Aufgabe 31) Bestimmte Integrale (4 Punkte + 2 Bonuspunkte)

Berechnen Sie die folgenden Integrale – hier bitte mit Rechenweg. Einfache Stammfunktionen aus der Tabelle 3.1.5. im Skript (Seite 55) dürfen Sie einsetzen. Es lohnt sich vermutlich auch, Kapitel 3.3.3 im Skript (Seite 74) und die dortigen Beispiele nochmal durchzulesen.

a) $\int_0^a dx/x^{1-a}$

b) $\int_{-a}^a dx x \sinh(2x/b)$ (Tip: Partielle Integration)

c) Zeigen Sie $\int_0^1 dx \sqrt{1-x^2} = \pi/4$ (Tip: Substitution $x = \sin(\phi)$)

d) $\int_0^\infty dx \sin(x) e^{-x}$ (Tip: Euler-Formel)

(Z) (Bonus) $\int_0^\infty dx x^n e^{-x}$ für $n \in \mathbb{N}$

Aufgabe 32) Unbestimmte Integrale (4 Punkte + 2 Bonuspunkte)

Berechnen Sie (und geben Sie den Rechenweg an) Einfache Stammfunktionen aus der Tabelle 3.1.5. im Skript (Seite 55) dürfen Sie benutzen.

a) $\int dx \sqrt{x \pm b}$

b) $\int dx x/(1+x^4)$ (Tip: Substitution $y = x^2$)

c) $\int dx \frac{x}{(x+1)(x+2)}$

d) $\int dt x \dot{x}$

(Z) (Bonus) $\int dx \arcsin(x)$

Aufgabe 33) Mehrdimensionale Integration und Kugelkoordinaten (8 Punkte)

Nach der barometrische Höhenformel folgt die Dichte der Luft $\rho(h)$ bei der Höhe h über dem Meeresboden der Gleichung

$$\rho(h) = \rho_0 \exp(-h/h_s)$$

mit $\rho_0 = 1.2041 \text{ kg/m}^3$ und der Skalenhöhe $h_s \approx 8.4 \text{ km}$.

- Verwenden Sie die barometrische Höhenformel, um das Gewicht der Atmosphäre abzuschätzen. Benutzen Sie dazu Kugelkoordinaten. Der Radius der Erde ist $R = 6.378 \text{ km}$.
- Die Erde habe eine mittlere Dichte von $\rho_E = 5.515 \text{ g/cm}^3$ (diese dürfen Sie im Inneren der Erde als konstant annehmen). Berechnen Sie den Anteil der Atmosphäre an der Gesamtmasse der Erde.

Hinweis: Die Masse M berechnet sich aus der Dichte $\rho(\vec{r})$ gemäß $M = \iiint d^3r \rho(\vec{r})$.