

Übungen zur Vorlesung "Mathematische Rechenmethoden"

Blatt 1

Abgabe bis spätestens Freitag, 25. Oktober 2019, vor 14:15 Uhr per Einwurf in den roten Kasten Nr. 24 im Erdgeschoss des Physik-Gebäudes (Staudingerweg 7) oder direkt bei Ihrem Tutor/Ihrer Tutorin.

Leseauftrag bis zum 24. Oktober: Skript Kapitel 1.3
oder alternativ

"K. Hefft, Mathematischer Vorkurs zum Studium der Physik", Kapitel 4.

Aufgaben zum Leseauftrag:

Aufgabe L1

Skizzieren Sie die folgenden Funktionen. Es muss nicht perfekt sein, es geht nur um ein qualitativ korrektes Bild.

- (a) $\cos(x)$ im Intervall $x \in [-2\pi : 2\pi]$
- (b) $\tan(x)$ im Intervall $x \in [-2\pi : 2\pi]$
- (c) $\exp(-x)$ im Intervall $x \in [0 : 10]$
- (d) $\ln(x)$ im Intervall $x \in [0 : 10]$
- (e) $\exp(-x * x)$ im Intervall $x \in [-3 : 3]$
- (f) $\arcsin(x)$ im Intervall $x \in [-1 : 1]$
- (g) $\cosh(x)$ im Intervall $x \in [-3 : 3]$
- (h) $\tanh(x)$ im Intervall $x \in [-3 : 3]$
- (i) $\operatorname{artanh}(x)$ im Intervall $x \in [-3 : 3]$
- (j) $\Theta(x)$ im Intervall $x \in [-1 : 1]$

Aufgabe L2

- (a) Berechnen Sie $\tan(0)$
- (b) Berechnen Sie $\tan(\pi/2)$
- (c) Berechnen Sie $\tan(-x)$
- (d) Berechnen Sie $\cos^2(x) + \sin^2(x)$
- (e) Berechnen Sie $\exp(\ln(x) + \ln(y))$
- (f) Berechnen Sie $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{1+x^2}$
- (g) Berechnen Sie $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(x)}{x}$
- (h) Zeigen Sie: ${}_b \log e = 1/\ln(b)$.

Diese Aufgaben werden je nach Bedarf in der Vorlesung vom 24. Oktober besprochen. Wenn Ihnen die Aufgaben leicht fallen, können Sie sich diese Vorlesung also schenken. Abgegeben werden müssen die Aufgaben zusammen mit den anderen am Freitag

Aufgabe A1) Vollständige Induktion (6 Punkte)

Beweisen Sie durch vollständige Induktion:

- $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$
- Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $4^n + 5$ ist durch 3 teilbar.
- Diskutieren Sie folgenden Beweis:

Behauptung: Wenn in einem Hörsaal mit n Personen mindestens eine Frau ist, dann sind in dem Hörsaal nur Frauen.

– Induktionsanfang: $n = 1$ – klar.

– Induktionsannahme: Die Behauptung gelte für n Personen.

– Induktionsschritt: Betrachte nun $n + 1$ Personen. Wir nummerieren sie so durch, dass Nummer eins eine Frau ist (Das geht, da laut Voraussetzung mindestens eine Frau im Hörsaal ist). Wir bitten die Person Nummer $n + 1$, den Hörsaal kurz zu verlassen. Dann sind in dem Hörsaal n Personen, darunter eine Frau, also sind es laut Induktionsannahme n Frauen. Wieder sind n Personen im Raum, darunter $(n - 1)$ Frauen (die Nummern $2 - n$). Damit ist laut Induktionsannahme also auch Nummer $n + 1$ weiblich.

Aufgabe A2) Funktionen (6 Punkte)

- a) Zeigen Sie: $\sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) = \frac{1}{2}(\sin x + \sin y)$
- b) Berechnen Sie ${}_b \log b$.
- b) Zeigen Sie $\operatorname{arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$

Aufgabe A3) Grenzwerte (8 Punkte)

Berechnen Sie folgende Grenzwerte

- a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax + 1}{bx^2 - 1}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$
- b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^2}{1 - x}$
- c) $\lim_{x \rightarrow \infty} 2^{-x} (\sin x)^n$ mit $n \in \mathbb{N}$
- d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-1/x}$
- e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x}$ und $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x}$
- f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x}$
- g) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x)$ (Hinweis: geht z.B. über die Regel von l'Hospital)
- h) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$